

УДК 548.73

# ПОЛУАНАЛИТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ФОКУСИРОВКИ СИНХРОТРОННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ПРОИЗВОЛЬНОЙ СИСТЕМОЙ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ПРЕЛОМЛЯЮЩИХ ЛИНЗ И ПРОБЛЕМА НАНОФОКУСИРОВКИ

© 2009 г. В. Г. Кон

Российский научный центр “Курчатовский институт”, Москва, Россия

Поступила в редакцию 20.02.2008 г.

Показано, что произвольная система параболических преломляющих линз не меняет форму гауссовой волновой функции пучка синхротронного излучения. Изменяются лишь три параметра волновой функции, для которых найдены рекуррентные формулы. Эти формулы позволяют быстро и точно провести расчет оптических свойств произвольной системы линз. Проведено сравнение параметров пучка излучения, рассчитанных развитым методом, с результатами теории для непрерывно преломляющей линзы и получено, что оба подхода дают удивительно близкие значения. Обсуждается проблема фокусировки пучка в нанометровый размер. Предложено использовать двухлинзовую систему и показано, что она может дать пятикратное увеличение числа фотонов в фокусе, хотя сам размер пучка уменьшить не удается.

## ВВЕДЕНИЕ

Для развития нанотехнологии, наряду с многими другими условиями, большое значение имеет реализация фокусировки пучка жесткого синхротронного излучения различными фокусирующими системами. Задача состоит в получении субмикронного, а в перспективе и нанометрового размера пучка. Жесткое рентгеновское излучение имеет длину волны  $\lambda$  менее 0.1 нм, но проблема в том, что оно очень слабо взаимодействует с веществом, в частности очень слабо преломляется с показателем преломления  $n = 1 - \delta$ , где  $\delta < 10^{-5}$ . Интуитивно ясно, что это должно приводить к определенным ограничениям на минимальный размер сфокусированного пучка. В работе [1] был установлен теоретический предел  $\lambda/(8\delta)^{1/2}$  на размер пучка, формируемого с помощью волноводной техники, использующей эффект полного внешнего отражения от гладкой поверхности материала. Причиной является конечное значение критического угла полного внешнего отражения. Так, для Si при  $\lambda = 0.1$  нм имеем  $\delta = 0.31 \times 10^{-5}$  и  $\lambda/(8\delta)^{1/2} = 20$  нм.

При использовании зонных пластинок Френеля, как известно, размер пучка примерно равен размеру крайней зоны. Но чтобы обеспечить необходимый сдвиг фазы в зонах толщина зон не может быть меньше нескольких микрон. В результате крайние зоны имеют вид длинных узких каналов. Аккуратный теоретический расчет таких зонных пластинок был выполнен в работах [2, 3], где было показано, что фокусировка в пучок меньшего размера, чем указано выше, возможна, хотя часть излучения все

же остается в каналах крайних зон и не проходит зонную пластинку.

Что касается составных преломляющих линз, развитие которых началось сравнительно недавно [4], то в работе [5] было показано, что они тоже позволяют преодолеть указанный выше предел, в частности можно получить пучок размером до 2 нм, хотя это и связано с решением сложных технологических проблем создания линз с очень малым радиусом кривизны поверхности. В работе [5] была предложена адиабатически фокусирующая линза как набор элементов, апертура которых уменьшается вместе с уменьшением размера пучка. Вместе с тем, анализ свойств такой линзы и даже ее конструкция, представленные в [5], оставляют много вопросов без ответов. Фактически результат получен с помощью численных расчетов с использованием процедуры, точность которой не оценивается.

Для анализа свойств составных преломляющих линз с параболическим профилем поверхности весьма полезными являются аналитические методы решения задачи транспорта излучения через преломляющую среду и в воздухе. В работах [6, 7] было получено точное (аналитическое) решение задачи для параболической непрерывно преломляющей линзы, которая состоит из очень большого числа одинаковых элементов с большим радиусом кривизны поверхности. Каждый элемент преломляет очень слабо, что позволяет усреднить его плотность по толщине элемента и в результате рассмотреть однородную вдоль пучка среду с параболическим изменением плотности в поперечном направлении.

Такая линза, даже при условии, что ее длина сравнима с ее фокусным расстоянием, не имеет aberrаций [8], в отличие от однократной линзы с теми же длиной и фокусным расстоянием. Вместе с тем, анализ показал, что при длине, сравнимой с фокусным расстоянием, линза, состоященная из одинаковых элементов, не является эффективной, поскольку последние ее элементы очень слабо воздействуют на пучок. Для более эффективной фокусировки необходимо использовать составную линзу, имеющую неодинаковые элементы [5, 9], которые учитывают изменение поперечных размеров пучка.

В данной работе представлена полуаналитическая теория фокусировки синхротронного излучения произвольной системой параболических преломляющих линз. Показано, что при распространении когерентной волны, описываемой волновой функцией специального гауссова вида с тремя параметрами, через оптическую систему, состоящую из параболических преломляющих линз, размещенных вдоль оптической оси на произвольных расстояниях, вид волновой функции не меняется, а только изменяются численные значения параметров. Для последних получены рекуррентные формулы, которые позволяют достаточно быстро и точно вычислить параметры пучка синхротронного излучения после фокусировки такой системой линз.

В следующем разделе выводятся рекуррентные формулы для параметров волновой функции когерентного излучения и обсуждаются общие свойства пучка на основе анализа указанных параметров. В третьем разделе проводится сравнение данной теории с теорией непрерывно преломляющей линзы [6, 7] и анализируется зависимость основных параметров линзы от числа ее элементов. Далее обсуждаются проблемы фокусировки пучка в нанометровый размер. В последнем разделе представлены некоторые результаты анализа оптических свойств двухлинзовой системы.

## ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ ТЕОРИИ

Как известно, синхротронное излучение в значительной степени поляризовано и, кроме того, поляризация не влияет на результат фокусировки, поэтому достаточно рассмотреть скалярную волновую функцию излучения  $\Psi_2(x, y, z)$ . Пусть ось  $z$  координатной системы направлена вдоль оптической оси и соответствует большим расстояниям (от миллиметра до нескольких метров), а оси  $x$  и  $y$  направлены перпендикулярно оптической оси, и характерный масштаб изменения волновой функции в этих направлениях – десятки микрон. Так как углы рассеяния для рентгеновских лучей очень малы, то с достаточной точностью можно использовать параксиальное приближение, в котором сферическая волна заменяется на цилиндрическую. Изменение волн-

вой функции при переносе излучения через пустое пространство описывается ее сверткой с пропагатором Киркгофа [10]:

$$\begin{aligned} P_2(x, y, z) &= P(x, z)P(y, z), P(x, z) = \\ &= (i\lambda z)^{-1/2} \exp(i\pi x^2/\lambda z), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\lambda$  – длина волны монохроматизированного излучения.

Рассмотрим тонкие двояковогнутые параболические линзы, которые на своей толщине не меняют поперечную координату траектории лучей. Их влияние на волновую функцию сводится к сдвигу фазы локально в каждой точке, включая и ее мнимую часть, связанную с поглощением. Такое изменение описывается стандартным в методе фазового контраста методом умножения волновой функции излучения на транспарантную функцию:

$$\begin{aligned} T_2(x, y, f_c) &= T(x, f_c)T(y, f_c), \\ T(x, f) &= \exp(-i\pi x^2/\lambda f), \quad f_c = \frac{R}{2(\delta - i\beta)}, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $R$  – радиус кривизны параболического профиля линзы, а параметры  $\delta$  и  $\beta$  связаны с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$  материала линзы формулой  $\epsilon = 1 - 2(\delta - i\beta)$ . Параметр  $f_c$  играет роль комплексного фокусного расстояния линзы. Вообще говоря, формула (2) применима только внутри геометрической апертуры линзы, а вне ее функция равна константе. Мы ограничимся рассмотрением только таких пучков, поперечные размеры которых меньше геометрической апертуры, поэтому ее учет слабо влияет на результат и этим влиянием можно пренебречь. Если же это не так, то достаточно модифицировать волновую функцию на входе таким образом, чтобы ее полуширина равнялась геометрической апертуре, поскольку часть волновой функции за пределами апертуры все равно не попадает в фокус.

Нас интересует фокусировка точечного источника с помощью системы таких линз, разнесенных вдоль оптической оси на некоторые расстояния. Формулы (1) и (2) определяют функции, обладающие цилиндрической симметрией, при которой координаты  $x$  и  $y$  описываются независимо. Очевидно, что волновая функция излучения тоже будет обладать подобной симметрией, то есть  $\Psi_2(x, y, z) = \Psi(x, z)\Psi(y, z)$ . При этом достаточно ограничиться анализом в какой-либо одной плоскости, например  $(x, z)$ , так как в другой плоскости все будет аналогично. Далее мы не будем выписывать координату  $z$  у волновой функции, а вместо нее будем ставить индекс, показывающий, сколько параболических линз уже сработало. С другой стороны, мы будем явно учитывать поперечную координату  $x_0$  точечного источника.

Итак, если нам известна волновая функция  $\Psi_0(x, x_0)$  перед параболической линзой с комплексным фокусным расстоянием  $f_c$ , то волновая функ-

ция после линзы на расстоянии  $z$  от нее будет описываться интегралом:

$$\Psi_1(x, x_0) = \int dx_1 P(x - x_1, z) T(x_1, f_c) \Psi_0(x_1, x_0). \quad (3)$$

Сформулируем теорему: если падающая волновая функция  $\Psi_0(x, x_0)$  имеет гауссову форму в виде

$$\Psi_0(x, x_0) = T(x, a_0) P(x - x_0, b_0) T(x_0, c_0) \quad (4)$$

с комплексными коэффициентами  $a_0, b_0$  и  $c_0$ , то волновая функция  $\Psi_1(x, x_0)$ , определенная формулой (3), имеет такую же форму:

$$\Psi_1(x, x_0) = T(x, a) P(x - x_0, b) T(x_0, c), \quad (5)$$

в которой лишь коэффициенты  $a, b$  и  $c$  принимают другие значения. Новые коэффициенты определяются через старые с помощью соотношений

$$\begin{aligned} a &= d \frac{b}{b_0}, \quad b = b_0 + z \left(1 - \frac{b_0}{d}\right), \quad c = \frac{c_0}{1 + z c_0 / b d}, \\ d &= \frac{a_0}{1 + a_0 / f_c}. \end{aligned} \quad (6)$$

Доказательство теоремы можно получить преобразованием интеграла (3) к табличному интегралу:

$$\int dx \exp(-i\beta x + i\gamma x^2) = \left(\frac{i\pi}{\gamma}\right)^{1/2} \exp\left(-i\frac{\beta^2}{4\gamma}\right). \quad (7)$$

Заметим, что правый множитель в (4) и (5) не определяет поперечную структуру волновой функции, т.е. не зависит от координаты  $x$ . Он в чистом виде описывает зависимость от координаты источника. По этой причине коэффициенты  $a$  и  $b$  не зависят от  $c_0$ , но  $c$  зависит от всех трех коэффициентов  $a_0, b_0$  и  $c_0$ .

Рассмотрим частные случаи. Если  $z = 0$  (сразу за линзой), то  $b = b_0, c = c_0$  и изменяется только коэффициент  $a$ , причем он удовлетворяет соотношению  $a^{-1} = a_0^{-1} + f_c^{-1}$ . Это сразу следует из (3), если заменить пропагатор Киркгофа на дельта-функцию. Если  $a_0^{-1} = f_c^{-1} = 0$ , то  $a^{-1} = 0, c = c_0$ , а  $b = b_0 + z$ . Эти соотношения сразу следуют из свойств пропагатора Киркгофа [10]. В общем случае рекуррентные соотношения (6) имеют достаточно сложный и не вполне наглядный вид. Тем не менее, они позволяют очень быстро выполнить расчет волновой функции для любой, произвольно сложной системы параболических линз. В качестве примера рассмотрим простейшую ситуацию с одной линзой. Пусть расстояние между источником излучения и линзой равно  $z_0$ . Нас интересует волновая функция на расстоянии  $z_1$  после линзы. Полагая  $a_0^{-1} = c_0^{-1} = 0, b_0 = z_0$  и применяя формулы (6), получаем:

$$a_1 = \frac{f_c}{z_0} b_1, \quad b_1 = z_0 + z_1 - \frac{z_0 z_1}{f_c}, \quad c_1 = \frac{f_c}{z_1} b_1. \quad (8)$$

Этот результат был получен ранее в [7].

Предположим, что мы учли все  $n$  параболических линз нашей системы и получили волновую функцию  $\Psi_n(x, x_0)$  с коэффициентами  $a, b, c$ . Экспериментально измеряется интенсивность излучения, т.е. квадрат модуля волновой функции. Нас интересует зависимость интенсивности  $I(x, x_0, z)$  от  $x$  при изменении расстояния  $z$  между детектором и последней,  $n$ -й, линзой в системе. Удобно вычислять относительную интенсивность, деля ее на интенсивность излучения источника на расстоянии  $z$  между ним и последней линзой. Из вида волновой функции (5) для интенсивности имеем выражение

$$\begin{aligned} I(x, x_0, z) &= |\Psi_n(x, x_0)|^2 = \\ &= I_m(z, x_0) \exp\left(-\frac{(x - x_m(z))^2}{2\sigma^2(z)}\right), \\ I_m(z, x_0) &= \frac{Z}{|b|} \exp\left(-\frac{x_0^2}{2\sigma_0^2}\right). \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь введены следующие параметры:

$$\begin{aligned} \sigma(z) &= \left(\frac{4\pi}{\lambda} [A - B]\right)^{-1/2}, \quad x_m(z) = -Mx_0, \\ M &= \frac{B}{A - B}, \quad \sigma_0 = \left(\frac{4\pi}{\lambda} [C - AM]\right)^{-1/2}, \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$A = |a|^{-2} \text{Im}(a), \quad B = |b|^{-2} \text{Im}(b), \quad C = |c|^{-2} \text{Im}(c). \quad (11)$$

Из (9) следует, что зависимость интенсивности от координаты  $x$  описывается гауссовой функцией при всех  $z$ , но параметры гауссовой кривой, такие как полуширина  $w(z) = C_w \sigma(z)$ , положение  $x_m(z)$  и высота  $I_m(z)$  изменяются. Здесь и далее константа  $C_w = (8\ln 2)^{1/2} = 2.3548$ .

Принимая во внимание некоторые очевидные физические свойства сфокусированного пучка, можно сделать общие выводы относительно параметров. Так, высота пика зависит от координаты  $z$  (через параметр  $b$ ) и от координаты источника  $x_0$ . При этом зависимость от  $x_0$  отражает тот факт, что для точек на источнике, сильно отклоненных от оптической оси, траектории лучей могут не пройти через апертуры всех линз по центру. Так как линзы поглощают, то это приведет к уменьшению максимума интенсивности. Образно говоря, протяженная система линз определяет эффективность различных точек на источнике в виде гауссовой функции с полушириной  $w_0 = C_w \sigma_0$ . Очевидно, что такая эффективность не может зависеть от  $z$ . Отсюда получаем, что величина  $(C - AM)$  не зависит от  $z$ . Это свойство действительно выполняется в численных расчетах, но доказать его аналитически для системы из большого числа линз – очень сложная задача.

Далее, интегральная по координате  $x$  интенсивность излучения определяется по формуле  $S(x_0) = 1.0645w(z)I_m(z, x_0)$ , где константа равна  $(2\pi)^{1/2}/C_w$ . Из энергетических соображений ясно, что она тоже не зависит от  $z$ , так как поглощением излучения в воздухе мы пренебрегаем. Для источника на оптической оси получаем, подставляя формулы:

$$A_\gamma = S(0) = \frac{\lambda^{1/2}Z}{[2|b|^2(A-B)]^{1/2}}. \quad (12)$$

Этот параметр мы далее будем называть эффективной апертурой. Он показывает, какая доля от полной интенсивности пучка прошла через систему линз и будет сфокусирована. Если бы линзы не поглощали, то эта доля определялась бы как раз апертурой. Из (12) следует, что величина  $G = |b|^2(A-B)$  не зависит от  $z$ . Но тогда сразу получаем, что фактор увеличения  $M = \text{Im}(b)/G$  линейно зависит от  $z$ . Удобно записать эту зависимость в виде  $M = (z + Z_1)/(z_0 + Z_0)$  с двумя параметрами  $Z_0$  и  $Z_1$ , где  $z_0$  – расстояние между источником и первой линзой. Очевидно, что для одной линзы имеем  $Z_0 = Z_1 = 0$ . Но для системы из двух и более линз эти коэффициенты уже не равны нулю, и могут быть отрицательными.

Формулу для полуширины пучка можно записать в виде  $w(z) = C_w(\lambda/(4\pi G))^{1/2}|b|$ , из которого следует, что зависимость от  $z$  определяется только последним множителем  $|b|$ . Как следует из формул (6),  $b = B_0 + zB_1$  есть комплексный параметр, линейно зависящий от  $z$ . Комплексные коэффициенты  $B_0$  и  $B_1$  могут быть найдены, например, из рекуррентной формулы (6) при учете последней линзы. Фокусным расстоянием  $z_f$  назовем расстояние, на котором пучок имеет минимальные размеры, т.е. функция  $|b|^2$  имеет минимум. Из этого условия сразу получаем  $z_f = -\text{Re}(B_0 B_1^*)/|B_1|^2$ . В этой же точке, очевидно, кривая поперечного распределения интенсивности имеет максимальную высоту.

Если применить полученную формулу к случаю с одной линзой, то получаем  $z_f = f/F$ , где  $F = 1 - f/z_0 + \gamma^2(1 - f/z_0)^{-1}$ ,  $\gamma = \beta/\delta$  и  $f$  – реальная часть комплексного фокусного расстояния, т.е. без учета поглощения. Отсюда следует, что если поглощения нет, то формула совпадает с хорошо известным выражением. Поглощением при фокусировке далеко расположенного источника короткофокусной линзой, когда  $f/z_0 \ll 1$  можно пренебречь, так как  $\gamma^2 \ll 1$ , но при использовании линзы в качестве коллиматора поправка, связанная с поглощением позволяет учесть тонкие эффекты, связанные с конечной апертурой линзы.

## СРАВНЕНИЕ С ТЕОРИЕЙ НЕПРЕРЫВНО ПРЕЛОМЛЯЮЩЕЙ ЛИНЗЫ

Прежде всего интересно сравнить результаты, получаемые в развитом выше подходе с результатами теории параболической непрерывно преломляющей (ПНП) линзы, развитой в работах [6, 7]. В теории ПНП линзы рассматривается составная линза из  $N$  одинаковых двояковогнутых элементов, каждый с толщиной  $p$ . Полная длина линзы равна  $L = pN$ . Для получения аналитического решения оптическая плотность вещества в каждом элементе усредняется по его толщине, что приводит к непрерывно преломляющей среде. Решение уравнения Максвелла для такой среды дает выражение для пропагатора изображения с помощью линзы, которое в точности совпадает с выражением (5), но с тем отличием, что коэффициенты определяются аналитическими формулами, а именно:

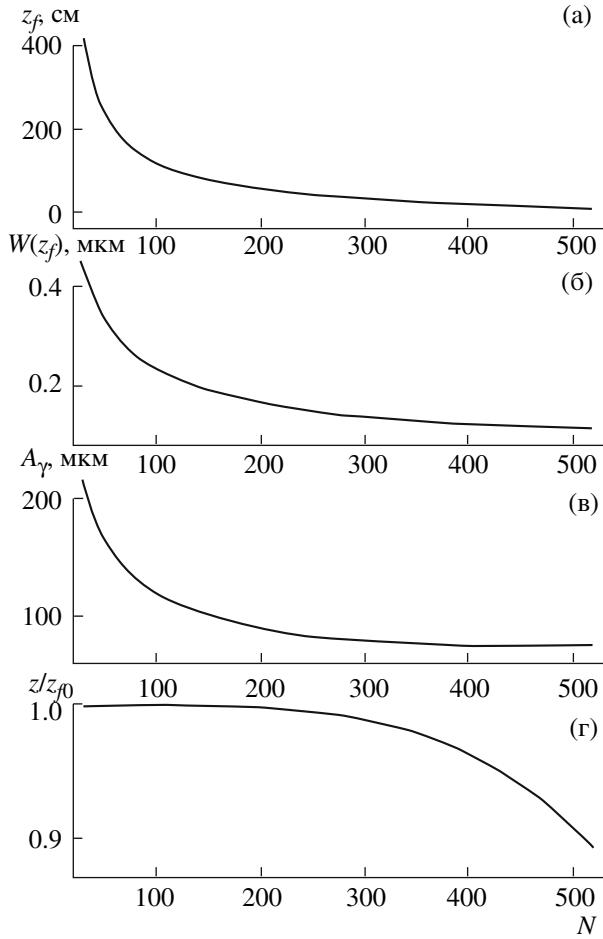
$$\begin{aligned} a &= b/g_0, \quad b = (r_0 + r_1)c_L + \left(z_c - \frac{r_0 r_1}{z_c}\right)s_L, \\ c &= b/g_1, \quad g_{0,1} = 1 - c_L + \frac{r_{0,1}}{z_c}s_L, \end{aligned} \quad (13)$$

где введены обозначения:  $r_0$  – расстояние от источника до начала линзы,  $r_1$  – расстояние от конца линзы до детектора, и

$$\begin{aligned} s_L &= \sin(L/z_c), \quad c_L = \cos(L/z_c), \\ z_c &= (pf_c)^{1/2}. \end{aligned} \quad (14)$$

Для сравнения ПНП-приближения с развитым выше подходом, в котором каждая линза, наоборот, считается очень тонкой, необходимо рассмотреть систему из  $N$  одинаковых линз с расстоянием между ними  $p$ . При этом расстояние от источника до первой линзы  $z_0 = r_0 + p/2$ , а расстояние от последней линзы до детектора  $z = r_1 + p/2$ . Выбирая стартовые коэффициенты  $a_0^{-1} = c_0^{-1} = 0$ ,  $b_0 = z_0$  и применяя рекуррентные соотношения (6)  $N$  раз, получаем ответ. Для численных расчетов выбраны параметры реальных линз [11, 12], а именно: материал – алюминий, радиус кривизны параболической поверхности элементов  $R = 0.2$  мм, толщина элементов  $p = 1$  мм, энергия фотонов  $E = 25$  кэВ, расстояние  $r_0 = 50$  м. Наиболее интересными параметрами являются: фокусное расстояние  $z_f$ , полуширина пучка в фокусе  $w(z_f)$ , и эффективная апертура  $A_\gamma$ . Мы рассматриваем случай, когда реальная апертура больше эффективной апертуры, поэтому оба подхода применимы.

Для расчетов использовались программы на языке ACL [13] для интерпретатора, написанного на языке программирования Java [14]. Были вычислены коэффициенты  $a$ ,  $b$ ,  $c$  двумя способами, а через них – указанные выше параметры в диапазоне  $N$  от 30 до 520. Заметим, что при  $N = 527$  линза фокусирует на своем конце, т.е.  $z_f = 0$ , и при дальнейшем



**Рис. 1.** Зависимость параметров преломляющей линзы, состоящей из набора одинаковых элементов, от числа этих элементов  $N$ :  $z_f$  – фокусное расстояние, отсчитываемое от конца линзы (а);  $w(z_f)$  – полуширина фокуса (б);  $A_\gamma$  – эффективная апертура (в);  $z_f$  – фокусное расстояние, отсчитываемое от середины линзы,  $z_0$  – оценка фокусного расстояния в приближении тонкой линзы с поправкой (г).

увеличении  $N$  рассмотренный выше метод определения фокусного расстояния неприменим. Оказалось, что оба способа приводят к удивительно близким результатам при всех  $N$  для всех трех параметров, причем разница уменьшается с ростом  $N$ , что также удивительно. Относительная разница имеет порядок величины  $10^{-6}$  для фокусного расстояния и интегральной интенсивности и  $10^{-7}$  для полуширины пучка в фокусе.

Кривые зависимости параметров  $z_f$ ,  $w(z_f)$  и  $A_\gamma$  от  $N$  показаны на рис. 1. Как можно заметить, при малых значениях  $N < 200$  все три параметра изменяются достаточно быстро: фокусное расстояние сокращается, полуширина пучка в фокусе уменьшается. Одновременно уменьшается и эффективная апертура. Однако при  $N > 200$  эти зависимости становятся более слабыми. Уменьшение фокусного расстояния описывается почти линейной кривой с относительно

слабым наклоном, а уменьшение полуширины пучка и апертуры практически останавливается. Интересно сравнить также фокусное расстояние длинной линзы с формулой, учитывающей поправку к значению для тонкой линзы. Последняя была выведена в работах [7, 15, 16]. Поправка к фокусному расстоянию учитывает длину линзы  $L$ . Фокусное расстояние отсчитывается от средней точки линзы и для параллельного пучка равно  $f_0 = R/(2N\delta) + L/6$ . Расстояние до изображения источника вычисляется по формуле тонкой линзы  $z_{f0} = f_0/(1 - f_0/(r_0 + L/2))$ . На рис. 1 показана зависимость  $z_f/z_{f0}$  от  $N$ , где  $z_f = z_f + L/2$ . Видно, что при  $N < 200$  это отношение практически равно единице, а затем оно уменьшается всего на 10%. Уменьшение объясняется тем, что поправка  $L^2$  в разложении фокусного расстояния по  $L$  имеет отрицательный знак. Интересно, что даже для линзы, фокусирующей на своем конце, т.е. когда  $z_f = L/2$ , фокусное расстояние в приближении тонкой линзы с поправкой не намного превышает точное значение.

Результаты расчета показали, что делать линзу из большого числа одинаковых элементов выгодно только до тех пределов, когда ее еще можно считать тонкой, т.е. ее длина меньше фокусного расстояния. В противном случае пучок сжимается в самой линзе и дополнительные элементы с большим радиусом кривизны неэффективны.

## О ФОКУСИРОВКЕ В НАНОМЕТРОВЫЙ РАЗМЕР

Рассмотрим одну тонкую поглощающую линзу, фокусирующую параллельный пучок, т.е. в пределе  $z_0 \rightarrow \infty$ . Используя формулы (8)–(12) в линейном по параметру  $\gamma = \beta/\delta$  приближении и выполняя предельный переход, получаем, что фокусное расстояние  $f = R/(2\delta)$ , полуширина пучка в фокусе  $w(f) = 0.6643(\lambda f)^{1/2}$ , где константа равна  $C_w/(4\pi)^{1/2}$ , а эффективная апертура  $A_\gamma = C_s w(f)/\gamma$ , где  $C_s = 1.0645 = (2\pi)^{1/2}/C_w$ . Из последней формулы следует, что, независимо от фокусного расстояния линзы, ее радиус кривизны и других параметров, полуширина пучка в фокусе всегда в  $\gamma$  раз меньше полуширины пучка сразу за линзой  $w(0) = A_\gamma/C_s$ . Это правило, кстати, хорошо выполняется в представленных на рис. 1 результатах расчета. Отношение  $w(z_f)/A_\gamma$  с ростом  $N$  монотонно уменьшается со значения 0.002 до значения 0.0015, в то время как  $\gamma = 0.002$ . Отметим также, что выполняется соотношение  $w(f) = 0.4697f/A_\gamma$ , где коэффициент равен  $1/(2C_s)$ . То есть в данном случае размер фокуса почти в два раза меньше, чем в случае непоглощающей линзы, когда  $w(f) = \lambda f/A$ .

Подставляя формулу для фокусного расстояния в формулу для полуширины пучка в фокусе, получаем условие на радиус кривизны, при котором возможна фокусировка в заданный размер  $w_1$ , а именно  $R_1 = 4.532w_1^2\delta/(\lambda\gamma)$ , где константа равна  $8\pi/C_w^2$ . Из этой формулы следует, что получить пучок ма-

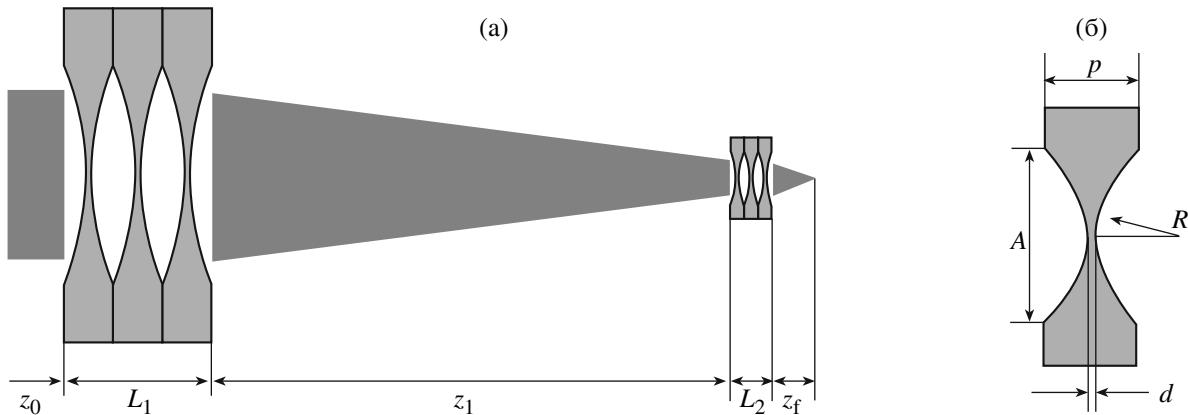


Рис. 2. Схема двухлинзовой системы (а); параметры одного элемента (б).

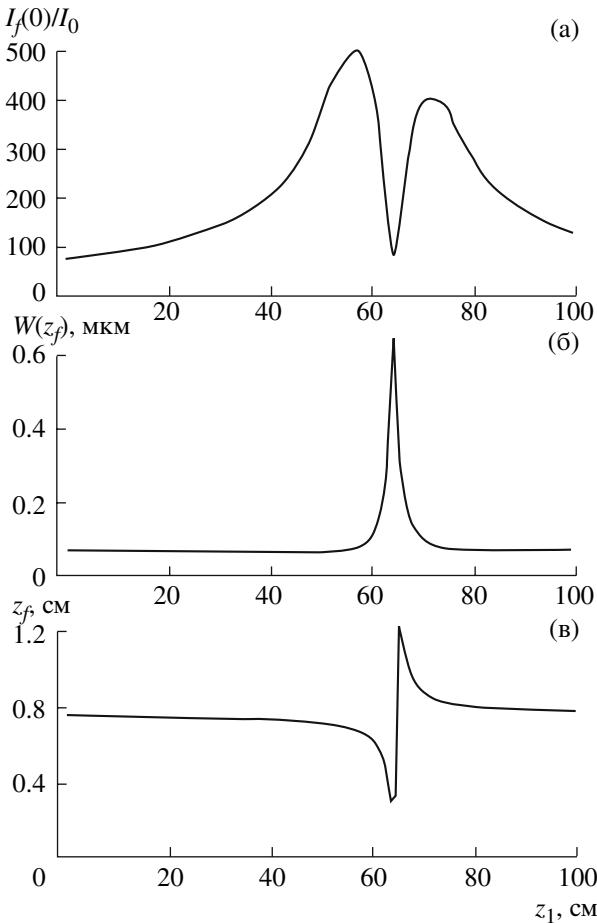
лых размеров – это очень сложная техническая задача. При каждом уменьшении размера пучка вдвое радиус кривизны необходимо уменьшать вчетверо. Реальная линза имеет конкретную длину \$L\$ и геометрическую апертуру \$A\$, с этой длиной связанную. Если пренебречь толщиной материала на оптической оси, то \$A = 2(RL)^{1/2}\$. По условию нашего приближения длина линзы должна быть меньше фокусного расстояния. Рассмотрим предельный случай \$L\_1 = f\_1 = R\_1/(2\delta)\$. Тогда геометрическая апертура \$A\_1 = R\_1(2/\delta)^{1/2}\$, а эффективная апертура \$A\_\gamma = C\_s w\_1/\gamma\$. Для справедливости используемых формул должно выполняться условие \$A\_\gamma < A\_1/2\$, которое можно переписать в виде \$w\_1 > w\_c = 0.3321\lambda/\delta^{1/2}\$.

Последнее условие показывает, что тонкая линза, апертура которой определяется поглощением, не может сфокусировать параллельный пучок в размер, меньше некоторого заданного размера \$w\_c\$. Полученный предельный размер не зависит от длины волны и почти равен параметру \$W\_c = \lambda/(8\delta)^{1/2}\$, введенному в статье [1] как универсальный нижний предел на размер рентгеновского пучка. Интересно, что он также не зависит от коэффициента поглощения материала, а только от его преломляющих свойств. Например, \$w\_c = 15.2\$ нм для алмаза, 16.8 нм для алюминия, 18.6 нм для кремния, 22.3 нм для берилля и 42.2 нм для лития. Наиболее низкие значения имеют плотные вещества, например, \$w\_c = 9.8\$ нм для никеля и 7.3 нм для вольфрама. В условиях достижения предельного размера фокуса \$w\_c\$ радиус кривизны линзы \$R\_c = \lambda/(2\delta)\$, а фокусное расстояние \$f\_c = \lambda/(4\delta)\$. Что касается эффективной апертуры, то она всего лишь в \$1/\gamma\$ раз больше размера фокуса. Эти параметры уже зависят от длины волны излучения и его поглощения в материале.

Интересно сравнить этот результат с другим предельным случаем очень тонкой линзы, когда на всей длине линзы \$L\$ поглощением можно пренебречь. Выбирая радиус кривизны из условия \$L = f\$ для геометрической апертуры \$A\$ получаем ту же

формулу, что и выше, т.е. \$A = R(2/\delta)^{1/2}\$, а полуширина пучка в фокусе определяется теперь формулой \$w(f) = \lambda f/A = W\_c\$. В данном случае результат не зависит от радиуса кривизны, так как фокусное расстояние пропорционально апертуре, но делать радиус кривизны большим нельзя, так как иначе поглощение станет существенно влиять на апертуру. С другой стороны, при фокусном расстоянии порядка длины линзы возникают aberrации [8], а если использовать составную линзу, то фокусное расстояние увеличится. Можно предположить, что в промежуточном случае, когда геометрическая апертура и эффективная апертура имеют близкие значения, ситуация кардинально не изменится.

Те же выводы справедливы и для составной линзы в виде плотноупакованного набора одинаковых элементов при условии, что ее длина меньше фокусного расстояния. Как следует из проведенного анализа, фокусировка в пучок с предельно малыми размерами реализуется линзой с очень малой апертурой, что приводит к малому числу фотонов в фокусе. С точки зрения увеличения числа фотонов в фокусе и уменьшения размера пучка в работе [5] была рассмотрена адиабатическая линза, но изготовление таких линз в настоящее время является практически недостижимой задачей. Более реальной для реализации является двухлинзовая система, в которой первая линза имеет большую апертуру и производит сжатие пучка в малую апертуру второй линзы (рис. 2а). При этом обе линзы состоят из одинаковых элементов и работают как тонкие поглощающие линзы. Число элементов в каждой линзе может быть относительно невелико, и, значит, паразитное поглощение в материале на оптической оси будет минимально, в то время как сжатие пучка после каждой линзы происходит в воздухе, где поглощение невелико.



**Рис. 3.** Параметры рентгеновского пучка, сфокусированного двухлинзовой системой, в зависимости от расстояния между линзами. Отношение пиковой интенсивности к таковой в отсутствие двухлинзовой системы (а); полуширина пучка в фокусе (б); фокусное расстояние, отсчитанное от конца второй линзы (в).

## АНАЛИЗ ДВУХЛИНЗОВОЙ СИСТЕМЫ

Для численного анализа оптических свойств двухлинзовой системы, в которой каждая из линз состоит из произвольного числа одинаковых элементов, разработана универсальная компьютерная программа на основе рекуррентных формул (6). Хотя эти формулы предполагают нулевую толщину элементов, реальная линза имеет заданную длину  $L$ , толщина одного элемента  $p = L/N$ , где  $N$  – число элементов, а геометрическая апертура  $A = 2(R(p-d))^{1/2}$ , где  $d$  – тонкая часть одного двояковогнутого элемента (рис. 2, правый фрагмент). Геометрическая апертура задает максимальный размер пучка, который реально может быть сфокусирован. В рамках рассматриваемой модели ее можно учесть путем вставки в начало каждой линзы нового элемента, который, не меняя фазу волны, ограничивает амплитуду по гауссовому закону с полушириной, равной геометрической апертуре. Такая процедура никак не влияет на результат, если эффективная апер-

тура линзы или размер пучка меньше геометрической апертуры. Но если эти условия не выполняются, то ее использование приводит к модели, более правильно отражающей реальную линзу.

Результаты расчетов по программе можно сформулировать следующим образом. С помощью двухлинзовой системы не удается сделать размер сфокусированного пучка меньше, чем в случае с одной (второй) линзой. Размер пучка либо сохраняется, либо увеличивается в зависимости от расстояния между линзами. В то же время интенсивность в фокусе может быть увеличена в несколько раз. Максимально высокая интенсивность получается на таком расстоянии между линзами, при котором ширина пучка перед второй линзой совпадает с ее эффективной апертурой. Это имеет место на расстояниях как меньше, так и больше фокусного расстояния первой линзы.

В качестве примера на рис. 3 показаны результаты расчета для системы, которая реально может быть выполнена в планарном варианте. Обе линзы из кремния, параметры первой линзы:  $N = 25$ ,  $L_1 = 1$  см,  $R = 100$  мкм,  $d = 2$  мкм, параметры второй линзы:  $N = 100$ ,  $L_2 = 0.1$  см,  $R = 5$  мкм,  $d = 1$  мкм, длина волны излучения  $\lambda = 0.1$  нм. При этом первая линза имеет эффективную апертуру  $A_\gamma = 55.5$  мкм и фокусное расстояние  $z_f = 63.6$  см. Максимум относительной интенсивности в фокусе  $I_f(0)/I_0 = 95.9$ , а полуширина фокуса  $w(z_f) = 543$  нм. Вторая линза имеет эффективную апертуру  $A_\gamma = 6.0$  мкм и фокусное расстояние  $z_f = 0.72$  см. Максимум относительной интенсивности в фокусе  $I_f(0)/I_0 = 87.0$ , а полуширина фокуса  $w(z_f) = 65$  нм. Здесь и далее фокусные расстояния отсчитываются от конца составной линзы в виде блока одинаковых элементов, так же как и расстояние между линзами  $z_1$  (рис. 2).

Как хорошо видно на рисунке, вторая линза становится неэффективной, если ее поместить в фокус первой линзы. С другой стороны, если она находится вдали от фокуса первой линзы, то размер пучка и фокусное расстояние практически не зависят от первой линзы. Только интенсивность в фокусе монотонно изменяется в зависимости от расстояния между линзами  $z_1$ . Таким образом, выигрыш в интенсивности можно получить в широком диапазоне расстояний, что удобно для практической настройки двухлинзовой системы.

Работа поддержана РФФИ (гранты № 05-02-16702, № 07-02-00067а) и грантом НШ 6869.2006.2.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bergemann C., Keymeulen H., van der Veen J.F. // Phys. Rev. Lett. 2003. V. 91. P. 204801.
2. Pfeiffer F., David C., van der Veen J.F., Bergemann C. // Phys. Rev. B. 2006. V. 73. P. 245331.
3. Schroer C.G. // Phys. Rev. B. 2006. V. 74. P. 033405.

4. *Snigirev A., Kohn V., Snigireva I., Lengeler B.* // *Nature*. 1996. V. 384. P. 49.
5. *Schroer C.G., Lengeler B.* // *Phys. Rev. Lett.* 2005. V. 94. P. 054802.
6. *Кон В.Г.* // *Письма в ЖЭТФ*. 2002. Т. 76. С. 701.
7. *Кон В.Г.* // *ЖЭТФ*. 2003. Т. 124. С. 224.
8. *Кон В.Г.* // *Изв. РАН. Сер. Физ.* 2004. Т. 68. № 4. С. 468.
9. *Snigireva I., Snigirev A., Kuznetsov A. S. et al.* // *Proc. SPIE*. 2001. V. 4499. P. 64.
10. *Kohn V.G.* // *Phys. Scripta*. 1997. V. 56. P. 14.
11. *Lengeler B., Schroer C., Tummler J., et al.* // *J. Synchrotron Radiat.* 1999. V. 6. P. 1153.
12. *Snigireva I.I., Kohn V.G., Snigirev A.A.* // *Proc. SPIE*. 2004. V. 5539. P. 218.
13. URL: <http://vkacl.narod.ru>
14. URL: <http://java.sun.com>
15. *Кон В.Г., Снигирева И., Снигирев А.* // *Поверхность. Рентген., синхротр. и нейтрон. исслед.* 2003. № 1. С. 33.
16. *Kohn V., Snigireva I., Snigirev A.* // *Opt. Commun.* 2003. V. 216. P. 247.

## **Semianalytic Theory of Focusing Synchrotron Radiation by Arbitrary System of Parabolic Refractive Lenses and the Problem of Nanofocusing**

**V. G. Kohn**

We show that an arbitrary system of parabolic refractive lenses does not change a shape of gauss wave function of synchrotron radiation beam. Only three parameters are changed, for which a recurrent formulae is derived. These formulae allow one to perform quickly and accurately a calculation of optical properties of arbitrary system of lenses. A comparison of parameters of radiation beam obtained by developed method with the results of the theory of continuously refracting lens is made. It is shown that both approaches give a surprisingly close values. The problem of focusing the beam to nanometer size is discussed. We propose to use a two-lenses system which can provide five-fold increasing the number of photons inside the focus, although the size of the focus is not decreased.