

УДК 548.732

## ПЕРСПЕКТИВЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ДЛИННЫХ ПРЕЛОМЛЯЮЩИХ ЛИНЗ ДЛЯ СИНХРОТРОННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

© 2004 г. В. Г. Кон

Российский научный центр “Курчатовский институт”, Москва

На основе теоретического анализа показано, что составные преломляющие линзы для фокусировки пучков рентгеновского синхротронного излучения и для формирования изображений с предельно высоким разрешением имеют преимущества по сравнению с линзами с одной или двумя границами. Даже предельно длинные линзы с максимально короткой длиной фокуса не имеют aberrаций. Развита точная теория транспорта излучения в непрерывно преломляющей линзе, в частности, получена аналитическая формула для пропагатора линзы, получены траектории лучей в линзе, аналитическая формула для пропагатора изображения, обобщенная формула линзы для фокусировки точечного источника и изображения микрообъектов. Обсуждается роль неоднородного поглощения излучения в линзе при формировании изображений.

### ВВЕДЕНИЕ

В течение 100 лет после открытия рентгеновских лучей преломляющая оптика для этого типа излучения считалась практически нереальной по той причине, что комплексный коэффициент преломления рентгеновских лучей  $n = 1 - \delta + i\beta$  очень мало отличается от единицы, причем оба фактора – как очень слабое преломление, так и конечное поглощение – приводят к проблемам. Например, для алюминия и энергии фотонов 25 кэВ имеем  $\delta = 8.64 \cdot 10^{-7}$ ,  $\beta = 1.75 \cdot 10^{-9}$ . Слабое преломление рентгеновских лучей – причина того, что для создания нужного профиля поверхности длина рентгеновской линзы  $L$  с разумно малой апертурой  $A$  должна быть сравнимой с длиной фокуса  $F$ , а радиус кривизны должен быть в  $10^{-6}$  раз меньше длины линзы. Что касается поглощения, то очень удачным обстоятельством оказалось то, что  $\text{Re}(n) < 1$ , поэтому фокусирующая линза является двояковогнутой. Следовательно, толщина материала в центральной части линзы относительно невелика.

Впервые преломляющая линза была создана в виде составной линзы, т.е. состоящей из многих повторяющихся элементов [1]. При этом радиус кривизны каждого элемента можно было выбрать относительно большим, чтобы нужный профиль мог быть реализован простыми средствами, в частности сверлением круглых отверстий. Первая линза фокусировала в линию. Были также изготовлены и испытаны линзы с двумя рядами отверстий, просверленных в двух взаимноперпендикулярных плоскостях [2, 3] для фокусировки в точку. Идея составной линзы реализована и в других методах создания фазового фронта волны с заданной кривизной. В одном из них вдавливают пузырьки воздуха в жидкий клей, который затем отвердевает [4]. Так называемая “аллигаторная” линза [5] име-

ет ряд треугольных зубов на двух поверхностях, ориентированных под малым углом друг к другу. При этом суммарная толщина материала на пути лучей представляет собой ломаную кривую, приближенно похожую на параболу.

Наиболее привлекательным представляется подход, развитый в [6, 7], где вместо сверления отверстий использовано выдавливание параболической границы с относительно большим радиусом кривизны в тонких пластинках из слабопоглощающего вещества (алюминий, пластик). Вскоре после этого с использованием современных высоких технологий были созданы планарные линзы из кремния, имеющие стандартную параболическую поверхность с очень малым радиусом кривизны [8]. Тем самым была показана принципиальная возможность создания рентгеновской оптики, аналогичной оптике видимого света.

Цель данной статьи – развитие теории составных преломляющих рентгеновских линз с параболическим профилем, длина которых сравнима с длиной фокуса. Показано, что составные линзы с большим числом элементов, каждый из которых представляет собой параболическую линзу с большим радиусом кривизны, имеют лучшие оптические свойства по сравнению с линзами, имеющими одну или две параболические поверхности с малым радиусом кривизны. В частности, непрерывно преломляющая линза, как предел составной линзы с очень большим числом элементов, совсем не имеет aberrаций при любой длине линзы, даже превышающей длину фокуса. Для нее развита точная теория переноса излучения [9], описывающая как фокусировку изображения функции объекта, так и фурье-преобразование.

## 1. ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРИЯ

Так как рентгеновские пучки очень слабо преломляются, они почти параллельны и их поперечные размеры (по оси  $x$ ) малы по сравнению с расстояниями между элементами экспериментальной схемы вдоль оптической оси (ось  $z$ ). Типичная схема эксперимента и обозначения показаны на рис. 1. В этих условиях справедливо параксиальное приближение, в котором вместо сферической волны используется параболический пропагатор, а интеграл Кирхгофа имеет максимально простой вид

$$A(x, z) = \int dx' P(x - x', r) A(x', z_0), \quad (1)$$

$$P(x, z) = \frac{1}{(i\lambda z)^{1/2}} \exp\left(i\pi \frac{x^2}{\lambda z}\right).$$

Здесь  $r = z - z_0$ , функция  $A(x, z)$  описывает поперечную зависимость рентгеновской волновой функции, полная амплитуда которой равна  $E(x, z) = \exp(ikz)A(x, z)$ , где  $k = 2\pi/\lambda$ ,  $\lambda$  – длина волны монохроматизированного излучения. Если волновая функция представляет собой сходящуюся параболическую волну, т.е. имеет параболическую зависимость фазы от поперечной координаты в плоскости  $z = z_0$ , то на расстоянии  $r = F$  она фокусируется в точку. При этом  $A(x', z_0) = T(x', F)$ , где  $T(x, F) = \exp(-i\pi x^2/\lambda F)$ .

Еще более интересные эффекты – фокусировка изображения волны и ее фурье-преобразование. Пусть функция  $A(x', z_0)$  в (1) представляет собой волновую функцию, перенесенную на расстояние  $r_o = z_0 - z_o$  из плоскости  $z = z_o$  и прошедшую через линзу, т.е. модифицированную фазовым множителем  $T(x', F)$ . В этом случае имеем двойной интеграл

$$A(x_i, z_i) = \int dx_o \left[ \int x' P(x_i - x', r_i) T(x', F) P(x' - x_o, r_o) \right] \times \times A(x_o, z_o), \quad (2)$$

причем интеграл в квадратных скобках вычисляется аналитически. В результате связь между функциями объекта и изображения можно записать в виде интегрального преобразования  $A(x_i, z_i) = \int dx_o G(x_i, x_o) A(x_o, z_o)$ , ядро которого имеет вид

$$G(x_i, x_o) = \frac{1}{(i\lambda r_g)^{1/2}} \times \times \exp\left(i\frac{\pi}{\lambda r_g} [g_i x_i^2 - 2x_i x_o + g_o x_o^2]\right), \quad (3)$$

где

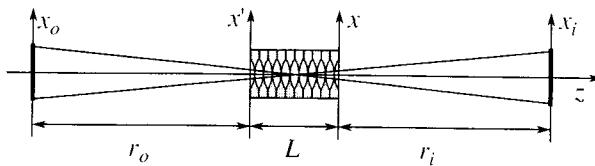


Рис. 1. Геометрические параметры экспериментальной схемы.

$$r_g = r_i + r_o - r_i r_o / F, \quad (4)$$

$$g_o = 1 - r_i / F, \quad g_i = 1 - r_o / F.$$

Условие  $r_g = 0$  соответствует формуле тонкой линзы для фокусировки излучения от точечного источника. В этом случае  $G(x_i, x_o) = M^{-1/2} \delta(x_o - x_{oi})$ , где  $\delta(x)$  – делта-функция Дирака,  $M = r_i/r_o$  – фактор увеличения,  $x_{oi} = -x_i/M$  – точка исходного волнового поля, которая фокусируется в изображении. В результате излучение переносится из одной плоскости на другую плоскость без изменений, за исключением фактора увеличения и инверсирования. С другой стороны, при выполнении условия  $g_o = 0$  интегральное преобразование превращается в фурье-изображение волнового поля. Оба эти явления хорошо известны и практически используются в оптике видимого света.

## 2. ДЛИННАЯ ОДНОЧНАЯ ЛИНЗА В ОТСУТСТВИЕ ПОГЛОЩЕНИЯ

Чтобы лучше понять проблемы преломляющей рентгеновской оптики, рассмотрим сначала искусственную ситуацию когда поглощение отсутствует, т.е.  $\beta = 0$ . По аналогии с оптикой видимого света необходимый фазовый сдвиг можно получить при прохождении рентгеновского пучка через вещество, толщина которого имеет параболическую зависимость от поперечной координаты.

Пусть параболическая граница существует только с одной стороны линзы, как показано на рис. 2. В этом случае в приближении геометрической оптики, пренебрегая отклонением лучей в линзе, получаем фазовый множитель в виде

$$T_L(x, F) = \exp\left(-i\frac{2\pi}{\lambda} \delta t(x)\right) = T(x, F) \exp\left(-i\frac{2\pi}{\lambda} \delta d\right), \quad (5)$$

$$\delta t(x) = \frac{x^2}{2R} + d, \quad F = \frac{R}{\delta}.$$

Здесь  $d$  – минимальная толщина линзы. Пусть линза имеет апертуру  $A$ , тогда ее длина  $L = A^2/8R + d$ . Обычно  $L \gg d$  и, чтобы упростить расчеты, положим  $d = 0$ . Так как декремент коэффициента преломления  $\delta \sim 10^{-6}$  – очень малая величина, то,

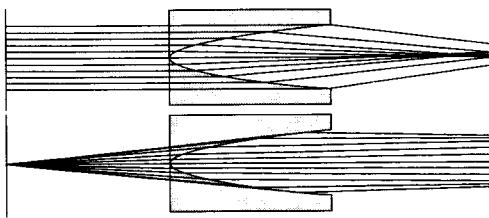


Рис. 2. Траектории лучей в односторонней линзе;  $F = 1.5L$ .

чтобы получить разумную длину фокуса  $F = 1$  м, необходимо создать параболическую границу с радиусом кривизны  $R = 1$  мкм. Еще совсем недавно такая задача казалась практически неразрешимой. Однако сегодня она в принципе решается, и по крайней мере планарные параболические линзы с таким радиусом кривизны созданы [8]. С другой стороны, чтобы получить разумную апертуру  $A = 2$  мм при таком радиусе кривизны, линза должна иметь длину  $L = 0.5$  м, что сравнимо с фокусным расстоянием. Таким образом, хотя в отсутствие поглощения размер апертуры ничем не ограничен, но резко увеличивающаяся длина линзы все равно создает проблемы.

Очевидно, что формулы (2) и (5) неприменимы для длинной линзы. Чтобы получить представление о возможностях такой линзы, используем геометрическую оптику. Рассмотрим сначала одностороннюю линзу с параболическим профилем на задней стороне линзы [8]. Луч, выходящий под углом  $\theta$  из точки  $x_o$  в исходной плоскости на расстоянии  $r_o$  перед линзой пересечет параболическую поверхность в точке  $x_1$ , в которой угол наклона луча изменится и станет равным  $\theta_1 = \theta - x_1/F$ . Затем луч пересечет плоскость наблюдения на расстоянии  $r_i$  после линзы в точке  $x_i$ . Для этих координат имеем уравнения  $x_1 = x_o + \theta(r_o + t)$ ,  $x_i = x_1 + \theta_1(r_i + L - t)$ , где  $t = x_1^2/2R$ . Здесь величина  $t$  равна толщине материала линзы в точке пересечения луча с параболической границей. Подставляя одно выражение в другое получаем

$$\begin{aligned} x_i &= x_o \left(1 - \frac{\tilde{r}_i}{F}\right) + \theta \left(\tilde{r}_o + \tilde{r}_i - \frac{\tilde{r}_o \tilde{r}_i}{F}\right), \\ \tilde{r}_o &= r_o + t, \quad \tilde{r}_i = r_i + L - t. \end{aligned} \quad (6)$$

Для фокусировки изображения необходимо, чтобы координата конечной точки траектории  $x_i$  не зависела от начального угла  $\theta$  при любом значении начальной координаты  $x_o$ . При  $L \ll F$ , пренебрегая длиной линзы по сравнению с расстояниями, сразу получаем формулу линзы и связь между точками через фактор увеличения. Однако в случае длинной линзы коэффициенты перед  $x_o$  и  $\theta$  определяются эффективными расстояниями, кото-

рые сложным образом зависят от координаты начальной точки и начального угла через толщину линзы в точке пересечения. В частности, при  $\theta = 0$  (параллельный падающий пучок) расстояния, на которых лучи пересекают оптическую ось ( $x_i = 0$ ), нелинейным образом зависят от начальной попечной координаты, а именно,  $r_i = F - L + x_o^2/2R$ . Отсюда следует, что лучи вблизи оптической оси будут фокусироваться на расстоянии  $F - L$ , в то время как лучи на краю апертуры будут сдвинуты на расстояние  $F$ . Этот вывод применим для линзы с любой конечной длиной, но влияние указанных aberrаций возрастает при увеличении отношения  $L/F$ .

На рис. 2 показан ход лучей для параллельного пучка (верхний фрагмент) и точечного источника (нижний фрагмент) в случае, когда  $r_o = r_i = L$ ,  $F = 1.5L$ . Заметим, что в реальной линзе вертикальный размер примерно в 1000 раз меньше по сравнению с показанным на рисунке. Длина фокуса, отсчитанная от середины линзы, соответствует расстоянию до плоскости наблюдения, поэтому параллельный пучок должен фокусироваться в точку, а излучение точечного источника – преобразовываться в параллельный пучок. Траектории реальных лучей значительно отличаются от желаемых траекторий.

Аналогичный анализ можно провести для двояковогнутой линзы с теми же параметрами  $L$  и  $F$ . В этом случае радиус кривизны поверхностей в 2 раза больше,  $L = A^2/4R$  и траектория лучей описывается цепочкой уравнений:  $x_1 = x_o + \theta(r_o + t_1)$ ,  $\theta_1 = \theta - x_1/2F$ ,  $x_2 = x_1 + \theta_1(t_2 - t_1)$ ,  $\theta_2 = \theta_1 - x_2/2F$ ,  $x_i = x_2 + \theta_2(r_i + L - t_2)$ ,  $t_1 = L/2 - x_1^2/2R$ ,  $t_2 = L/2 + x_2^2/2R$ . Общее выражение для  $x_i$  через  $x_o$  и  $\theta$  имеет громоздкий вид. Рассмотрим, как и выше, расстояния, на которых параллельные лучи пересекают оптическую ось после прохождения через линзу, причем для простоты ограничимся только линейными по  $L/F$  поправками (это справедливо, когда  $L/F \ll 1$ ). В этом случае получаем  $r_i = F - L/2 + x_o^2/4R$ . Значит, лучи вблизи оптической оси будут фокусироваться на расстоянии  $F - L/2$ , в то время как лучи на краю апертуры будут отодвинуты на расстояние  $F - L/4$ . Таким образом, разброс лучей в данном случае в 4 раза меньше, чем для односторонней линзы. По этой причине двояковогнутая линза имеет преимущество по сравнению с односторонней линзой.

На рис. 3 показан ход лучей в такой линзе для тех же значений параметров, что и на рис. 2. Хотя aberrации и меньше, чем в первом случае, но все же они заметны даже при низком разрешении рисунка. На рис. 4 показан ход лучей в линзе при том же соотношении расстояний  $r_o = r_i = L$ , но когда  $F = 0.75L$ . В этом случае тонкая линза фокусирует излучение точечного источника на указанных рас-

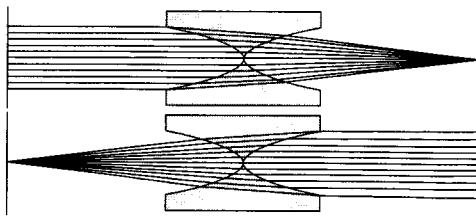


Рис. 3. Траектории лучей в двояковогнутой линзе;  $F = 1.5L$ .

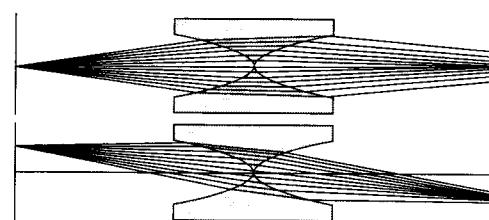


Рис. 4. Траектории лучей в двояковогнутой линзе;  $F = 0.75L$ .

стояниях. В длинной линзе, однако, фокусируются только лучи около оптической оси, преломленные в центральной части линзы. Траектории лучей, преломленных вблизи края апертуры, не приходят в точку фокуса.

Аналогичный анализ можно продолжить и рассмотреть комбинации из двух, трех и более линз, имеющие в совокупности те же длину и фокусное расстояние. Хотя аналитические расчеты этих случаев все более усложняются, в линейном по  $L/F$  приближении можно показать, что с ростом числа линз разброс исходно параллельных лучей вдоль оптической оси резко уменьшается и область фокусировки концентрируется на расстоянии  $r_i = F - L/3$ . Таким образом, можно сделать вывод, что составная длинная линза имеет лучшие оптические свойства по сравнению с нормальной длинной линзой. Этот факт следует иметь в виду даже и тогда, когда  $L/F \ll 1$ .

### 3. НЕПРЕРЫВНО ПРЕЛОМЛЯЮЩАЯ ЛИНЗА В ОТСУТСТВИЕ ПОГЛОЩЕНИЯ

Параболической непрерывно преломляющей (ПНП) рентгеновской линзой будем называть такую линзу, которая получается в результате предельного перехода  $N \rightarrow \infty$  последовательности линз, имеющих одну и ту же геометрическую длину  $L$ , апертуру  $A$  и номинальную длину фокуса  $F = F_1/N$ , но различающихся числом элементарных линз  $N$  и радиусом кривизны  $R = R_1N$  параболических поверхностей, как показано на рис. 5. Толщина элементарной линзы  $p = L/N$  при этом стремится к нулю, а длина ее фокуса  $F_1 = R/2\delta$  неограниченно растет. Однако преломляющие свойства на единицу длины такой системы линз достаточно быстро перестают зависеть от  $N$  и определяются критической длиной  $L_c = (pF_1)^{1/2} = (pR/2\delta)^{1/2}$ .

Траектория лучей в линзе меняется непрерывно и описывается функцией  $x = x(z)$ , в то время как угол, который луч образует с осью  $z$ , очевидно, равен  $\theta = \theta(z) = dx/dz$ . С другой стороны, рассматривая один элемент линзы с параболическим профилем и делая предельный переход, легко показать, что изменение углового положения луча определяется уравнением  $d\theta_i/dz = -x_i(z)/L_c^2$ . Получившая-

ся система дифференциальных уравнений имеет аналитическое решение. При этом на выходе из ПНП-линзы с длиной  $L$  имеем

$$\begin{aligned} x_i(L) &= x_0 C_L + \theta_0 L_c S_L, \\ \theta_i(L) &= \theta_0 C_L - \frac{x_0}{L_c} S_L. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь и далее используются обозначения  $C_L = \cos(u_L)$ ,  $S_L = \sin(u_L)$ ,  $u_L = L/L_c$ . Кроме того,  $x_0$  и  $\theta_0$  – координаты луча при входе в рентгеновскую ПНП-линзу. Из (7) следует, что параметры лучей при выходе из линзы периодически изменяются. Когда длина линзы  $L = 2\pi L_c$ , где  $n$  – целое число, параметры лучей на выходе совпадают с исходными. Это означает, что такая линза изображает волновую функцию без искажений. Если длина линзы  $L = 2\pi(n + 1/2)L_c$ , то координаты лучей оказываются инверсированными. Наконец, при длине линзы  $L = \pi(n + 1/2)L_c$  все параллельные траектории оказываются на оптической оси независимо от начальной координаты.

Как недавно показано в [9], для ПНП-линзы можно написать аналитическое выражение для пропагатора  $P_L(x, x', L)$ , который является ядром интегрального соотношения типа (1) и преобразует волновую функцию на входе линзы длиной  $L$  в волновую функцию на выходе из линзы. Аналитическое выражение определяется формулой (12) в [9]. Ее можно тождественно преобразовать к следующему симметричному виду:

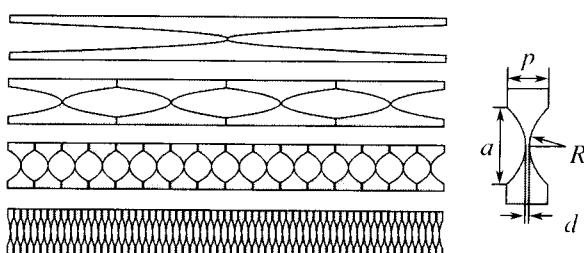


Рис. 5. Последовательность линз с увеличивающимся числом элементов (слева) и параметры отдельного элемента (справа).

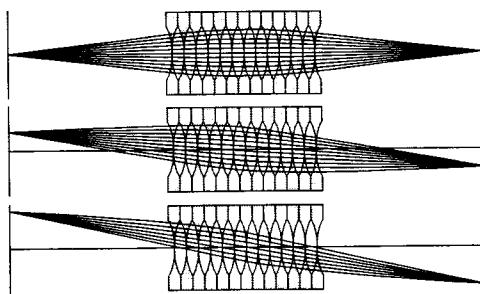


Рис. 6. Траектории лучей в непрерывно преломляющей линзе.

$$P_L(x, x', L) = T\left(x, \frac{r_L}{a_L}\right) P(x - x', r_L) T\left(x', \frac{r_L}{a_L}\right), \quad (8)$$

$$T(x, r) = \exp\left(-i\pi\frac{x^2}{\lambda r}\right),$$

т.е. выразить через пропагатор Кирхгофа (1) и сходящийся параболический фазовый множитель, но с более сложными аргументами, а именно:  $r_L = L_c S_L$ ,  $a_L = 1 - C_L$ .

Аналитический расчет более сложного пропагатора, описывающего перенос волновой функции из плоскости, расположенной на расстоянии  $r_o$  перед линзой, на плоскость, удаленную от линзы на расстояние  $r_i$  (см. рис. 1), выполняется с помощью табличного интеграла, использованного при переходе от формулы (2) к формуле (3). Ответ снова имеет вид (3), но с другими аргументами:

$$r_g = (r_i + r_o)C_L + \left(L_c - \frac{r_i r_o}{L_c}\right)S_L, \quad (9)$$

$$g_o = C_L - \frac{r_i}{L_c}S_L, \quad g_i = C_L - \frac{r_o}{L_c}S_L.$$

Интересно, что аргументы можно записать в виде, какой они имеют в элементарной теории, если ввести обобщенные расстояния и длину фокуса

$$r_g = r_{iL} + r_{oL} - \frac{r_{iL}r_{oL}}{F_L}, \quad (10)$$

$$g_o = 1 - \frac{r_{iL}}{F_L}, \quad g_i = 1 - \frac{r_{oL}}{F_L},$$

где

$$r_{iL} = r_i + b_L, \quad r_{oL} = r_o + b_L, \quad (11)$$

$$F_L = \frac{L_c}{S_L}, \quad b_L = F_L(1 - C_L).$$

Следовательно, для ПНП-линзы произвольной длины существует обобщенная формула линзы, в которой как длина фокуса, так и расстояния зависят от длины линзы нелинейным образом. При ма-

лой длине линзы, очевидно, как пропагатор, так и формула линзы переходят к пределу элементарной теории. Условие малой длины линзы имеет вид  $L \ll L_c$ . В этом случае длина фокуса линзы  $F_L \rightarrow$

$\rightarrow F = L_c^2/L$  увеличивается обратно пропорционально  $L$  при уменьшении  $L$ . При этом полученное выше условие эквивалентно  $L \ll F$ . Можно без труда написать поправки первого порядка по малому параметру  $L/F$

$$r_{iL} = r_i + \frac{1}{2}L, \quad r_{oL} = r_o + \frac{1}{2}L, \quad F_L = F + \frac{1}{6}L. \quad (12)$$

Этот приближенный результат был получен ранее в [10] достаточно сложным образом. Он естественно вытекает из точной теории.

Из полученного выше аналитического решения (3), (9) для пропагатора немедленно следует, что рентгеновская ПНП-линза прекрасно фокусирует изображение и делает фурье-преобразование, т.е. она совсем не имеет aberrаций при любой длине линзы. На рис. 6 показан ход лучей в такой линзе для значений параметров  $r_o = r_i = L$ ,  $r_g = 0$ . Эти условия выполняются при  $u_L = 1.30654$ . При этом  $F_L = 0.793L$ . Итак, в отсутствие поглощения рентгеновская ПНП-линза имеет отличные оптические свойства независимо от ее длины. Увеличением длины линзы можно полностью компенсировать малую величину декремента коэффициента преломления. Действительно, явное значение параметра критической длины линзы никак не входит в приведенное выше условие фокусировки изображения.

#### 4. РОЛЬ ПОГЛОЩЕНИЯ

В реальной жизни показатель поглощения  $\beta$  не равен нулю, хотя отношение  $\gamma = \delta/\beta \ll 1$ , поэтому все полученные выше формулы остаются справедливыми и в этом случае, если в них параметр  $\delta$  заменить на  $\eta = \delta(1 - i\gamma)$ . При этом фазовый множитель в (5), описывающий сходящуюся параболическую волну, умножается на дополнительный множитель, убывающий по гауссову закону. Для одиночной линзы это приводит к естественному ограничению апертуры из-за поглощения, а следовательно, и к ограничению длины линзы, так как лишнюю длину можно просто отрезать или не принимать во внимание. Выберем такое значение  $x = A/2$ , что  $\mu(x) = (4\pi/\lambda)\beta(x^2/R) = 2$ . Тогда  $x^2 = \lambda R/2\pi\beta$ , длина двояковогнутой линзы с такой апертурой равна  $L = x^2/R = \lambda/2\pi\beta$ . В результате имеем соотношение на радиус кривизны  $R = (F/L)(\lambda/2\pi\beta)$ . Отсюда следует, что при длине линзы, равной фокусному расстоянию и оптимизированной апертуре, требование на радиус кривизны невозможно выполнить, так как при типичных значениях  $\lambda \sim 0.5 \cdot 10^{-4}$  мкм,  $\gamma \sim 2 \cdot 10^{-3}$  получаем  $R < 10^{-2}$  мкм, в то время как  $L = F \approx 0.5$  см (при  $\delta \approx 10^{-6}$ ). Если же

использовать оптимизированную апертуру и заданный радиус кривизны, который определяется технологией, то линза всегда коротка по сравнению с длиной фокуса. Заметим, что с ростом  $R$  апертура растет как  $R^{1/2}$ , длина фокуса – как  $R$ , а длина линзы вообще не зависит от  $R$  и определяется только показателем поглощения  $\beta$ .

Таким образом, длинная одиночная линза – понятие довольно условное. Если линза настолько длинная, что ее длина сравнима с фокусным расстоянием, то при достижимом радиусе кривизны она неизбежно не использует всю свою апертуру, т.е. работает только центральная часть линзы с гораздо меньшей длиной.

Принципиальное отличие составной линзы от одиночной линзы состоит в том, что с увеличением числа элементов происходит эффективное уменьшение радиуса кривизны профиля фазовой поверхности независимо от поглощения. Другими словами, преломляющие свойства составной линзы зависят от ее длины. При заданном радиусе кривизны  $R$  одного элемента его максимальная толщина  $p$  определяет геометрическую апертуру:  $a = 2[R(p - d)]^{1/2}$ , где  $d$  – минимальная толщина линзы, которая обычно много меньше  $p$ , и при выполнении качественных оценок ею можно пренебречь. Эта апертура работает полностью только при таком числе элементов  $N$ , что  $pN = L \leq \lambda/4\pi\beta$ . Для типичных значений  $\lambda \sim 0.5 \cdot 10^{-8}$  см и  $\beta \sim 2 \cdot 10^{-9}$  получаем  $L \leq 0.2$  см. В этом случае линза еще коротка для используемых на практике значений апертуры, так как условие  $L \ll F$  эквивалентно условию  $a \gg (\lambda/\pi)(2\beta)^{-1/2} \sim 0.005$  мм.

Дальнейшее увеличение числа элементов эффективно приводит к уменьшению радиуса кривизны, хотя апертура уже используется лишь частично. Если в случае с одной линзой увеличение длины линзы при заданном радиусе кривизны уже ничего не меняет, то для составной линзы уменьшение эффективной апертуры сопровождается эффективным уменьшением радиуса кривизны, а следовательно, и длины фокуса.

Формально в условиях уменьшения эффективной апертуры можно было бы уменьшать толщину элементов, уменьшая тем самым длину линзы. Но уменьшение толщины элементов ограничено технологическими причинами. Действительно, пусть  $pN = L \approx \lambda/4\pi\beta \approx 0.2$  см, длина фокуса  $F = R/2\delta N$ , при  $L \approx F$  имеем  $N \approx 2\pi\beta R/\lambda$  и  $p \approx 2L^2\delta/R$ . При  $R = 0.2$  мм для указанных выше параметров имеем  $p \approx 5 \cdot 10^{-5}$  мм, в то время как  $N \approx 5 \cdot 10^4$ . Эти параметры находятся за пределами технологических возможностей.

Тем не менее при заданном радиусе кривизны  $R$  длина фокуса  $F$  монотонно убывает с ростом  $N$ . При заданной толщине чипа  $p$  длина линзы  $L = pN$  монотонно растет с увеличением  $N$ , поэтому условие  $L \approx F$  легко выполнить. При этом эффективная апертура такой линзы зависит от ее длины и со-

ставляет малую часть от геометрической апертуры. Однако этой апертуры еще достаточно для изображения микрообъектов. Например, как показано в [9], при  $p = 1$  мм,  $R = 0.2$  мм линза из алюминия при энергии фотонов  $E = 25$  кэВ фокусирует параллельный пучок на своем конце при  $N = 534$ . Используя точное выражение для пропагатора (8), можно показать, что в этом случае диаметр дифракционно уширенного фокусного пятна 0.11 мкм, а эффективная апертура 100 мкм.

## 5. ОЦЕНКА РАЗМЕРОВ АПЕРТУРЫ И ФОКУСА ДЛЯ ПНП-ЛИНЗЫ

Важное практическое значение имеет точное знание таких параметров, как размеры эффективной апертуры рентгеновской линзы и размеры фокусного пятна при фокусировке плоской волны. В оптике видимого света апертура зависит от геометрических размеров линзы, т.е. от той площади, проходя через которую, лучи затем сходятся в фокусе. В случае “тонкой” поглощающей ПНП-линзы для этого достаточно рассмотреть распределение интенсивности излучения сразу после линзы. При этом эффективную апертуру определяет поглощение излучения в материале линзы. Так как в пустом пространстве интегральная интенсивность волны сохраняется, между размерами апертуры и фокуса существуют простые энергетические соотношения. Для линзы произвольной длины, рассматриваемой в данной статье, такой подход не годится, так как частичная или полная фокусировка падающей плоской волны может происходить в самой линзе, поэтому распределение интенсивности излучения сразу за линзой не дает представления о реальной апертуре линзы.

Апертуру длинной ПНП-линзы в принципе можно определить через свойства пропагатора  $G(x_i, x_o)$ . Рассмотрим здесь другой, более простой, подход, основанный на энергетических соображениях: под эффективной апертурой линзы будем понимать интегральную интенсивность излучения в фокусе, т.е. часть интенсивности плоской волны, которая прошла через линзу не поглотившись. При этом паразитное поглощение на тонких частях элементарных линз с толщиной  $d$  (см. рис. 5) можно не учитывать. Ограничимся случаем, когда длина линзы  $L \leq L_0 = (\pi/2)L_c$  и линза фокусирует набегающую волну в пространстве за собой, т.е. на расстоянии  $r_f > 0$ . Очевидно, амплитуду волны после линзы при освещении ее плоской волной получим, вычислив свертку пропагатора  $G(x_i, x_o)$  с единичной функцией, не зависящей от координат, точнее, интегрируя по координате  $x_o$ . Интеграл сводится к преобразованию Фурье от гауссовой функции и вычисляется точно. В результате

$$A(x_i) = \left( \frac{z_c}{(z_c c_L - r_i s_L)} \right)^{1/2} \exp\left(-i\pi \frac{x_i^2 s_L}{\lambda(z_c c_L - r_i s_L)}\right). \quad (13)$$

Здесь  $z_c$  получается из  $L_c$  заменой  $\delta$  на  $\delta(1 - i\gamma)$ , а  $c_L$ ,  $s_L$  – из  $C_L$ ,  $S_L$  заменой  $L_c$  на  $z_c$ .

Заметим, что результат не зависит от расстояния  $r_o$ . С физической точки зрения, очевидно, что это выражение можно получить и непосредственно из пропагатора изображения (3), (9), рассматривая точку вблизи оптической оси на бесконечном расстоянии  $r_o$  и деля его на амплитуду пропагатора Кирхгофа на том же расстоянии, поскольку точечный источник на бесконечном расстоянии дает плоскую волну перед апертурой линзы.

Как следует из (13), плоская волна перед линзой превращается в гауссову волну после линзы. Принимая во внимание, что параметр поглощения  $\gamma \ll \ll 1$ , для качественной оценки можно использовать линейное приближение по  $\gamma$ . С учетом принятого ограничения на длину линзы имеем соотношения  $s_L \approx S_L - i(\gamma/2)u_L C_L$ ,  $c_L \approx C_L + i(\gamma/2)u_L S_L$ ,  $z_c \approx L_c(1 + i\gamma/2)$ . Максимум достигается на расстоянии  $r_i = F_L C_L$ . При этом

$$\begin{aligned} |A(x_i)|^2 &= \frac{1}{\gamma \alpha_L} \exp\left(-\frac{2\pi}{\gamma \lambda F_L \alpha_L} x_i^2\right), \\ \alpha_L &= \frac{1}{2} \left( C_L + \frac{u_L}{S_L} \right). \end{aligned} \quad (14)$$

Используя полученное выражение, для эффективной апертуры  $A_\gamma$ , определяемой как интегральная интенсивность фокуса, и для полной ширины на половине высоты пика интенсивности  $s_\gamma$ , получаем

$$\begin{aligned} A_\gamma &= \int dx_i |A(x_i)|^2 = \left( \frac{\lambda F_L}{2\gamma \alpha_L} \right)^{1/2}, \\ s_\gamma &= 0.664 (\gamma \lambda F_L \alpha_L)^{1/2}, \quad s_\gamma = 0.47 \frac{\lambda F_L}{A_\gamma}. \end{aligned} \quad (15)$$

Из полученных формул следует, что отношение  $s_\gamma/A_\gamma = 0.94\gamma\alpha_L$ , причем в пределе “тонкой” линзы  $L \ll L_0$  имеем  $\alpha_L = 1$ , а в пределе самофокусирующей линзы  $L = L_0$  имеем  $\alpha_L = \pi/4 = 0.785$ . Следовательно, степень сжатия пучка в среднем равна  $0.8\gamma$  и довольно слабо зависит от длины ПНП-линзы. С другой стороны, эффективная апертура линзы уменьшается с ростом  $L$  как  $F_L^{1/2}$ . Заметим, что для самофокусирующей линзы  $F_L = L_c$ , т.е. обобщенная длина фокуса в 1.57 раз меньше длины самой линзы. Очевидно, это минимальная длина фокуса, которую можно получить для линзы с заданными параметрами радиуса кривизны  $R$ , толщины элементарной линзы  $r$  и декремента коэффициента преломления  $\delta$ .

## 6. СФОКУСИРОВАННОЕ ИЗОБРАЖЕНИЕ МИКРООБЪЕКТА

В реальной ситуации рентгеновского эксперимента с помощью линзы изображается относительно тонкий объект, который освещается волной, излучаемой точечным источником, расположенным на расстоянии  $r_s$  от объекта и имеющим поперечные координаты  $x_s$  и  $y_s$ . Как правило, источник имеет конечные размеры, но разные точки источника некогерентны, поэтому на последней стадии расчета необходимо провести интегрирование интенсивности по координатам источника. В этом разделе ограничимся случаем, когда расстояние от источника до объекта достаточно велико и угловые размеры источника в плоскости объекта не превышают характерных углов рассеяния объектом. Другими словами, выполняются условия когерентного изображения.

Нормированная волновая функция в плоскости изображения микрообъекта вычисляется с помощью интеграла

$$A^{(t)}(x_i, y_i) = \lambda r_s \int dx_o dy_o G_s^{(t)}(x_i, y_i, x_o, y_o) T(x_o, y_o), \quad (16)$$

где  $r_t = r_s + r_o + r_i$ ,

$$\begin{aligned} G_s^{(t)}(x_i, y_i, x_o, y_o) &= \\ &= \exp\left(-ik\eta \frac{d}{p} L\right) G_s(x_i, x_o) G_o(y_i, y_o). \end{aligned} \quad (17)$$

Функция  $G_s(x_i, x_o) = G(x_i, x_o) P(x_o - x_s, r_s)$  представляет собой парциальный пропагатор изображения объекта, а функция  $T(x_o, y_o) = \exp[i\psi(x_o, y_o)]$  описывает перенос волновой функции излучения через микрообъект, т.е. является функцией объекта.

Экспоненциальный множитель в формуле (17) описывает паразитное поглощение на тонких частях элементарных линз, но фактически не участвует в формировании изображения. Интеграл в формуле (17) в общем случае может быть рассчитан только численными методами, так как функция  $T(x_o, y_o)$  заранее не определена и зависит от структуры микрообъекта. С другой стороны, ядро интегрального преобразования имеет аналитический вид, что существенно упрощает расчеты и делает их более точными.

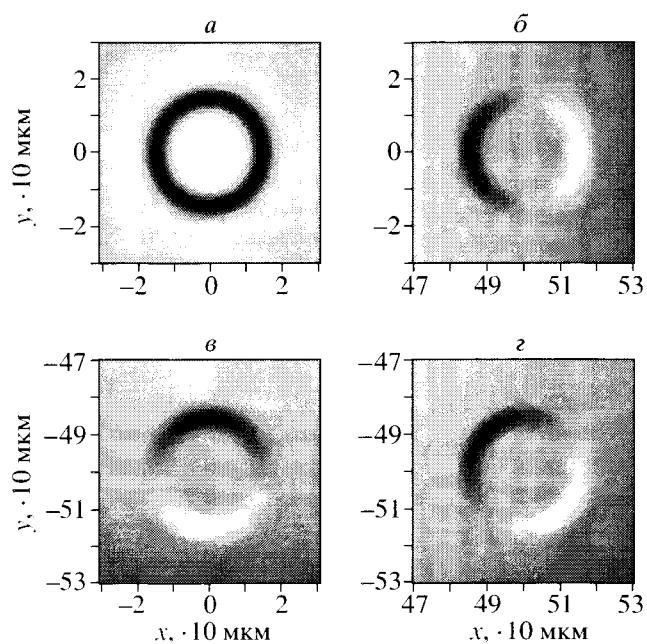
На основе формул (1), (3), (9), (16), (17) разработана универсальная компьютерная программа для расчета изображений микрообъектов. Программа написана в среде “Igor-Pro” фирмы “WaveMetrics” [11] и позволяет в интерактивном режиме задавать параметры для расчета и получать готовые картины изображений. Программа способна работать при разных значениях параметров, включая как частный случай расчет сфокусированного изображения, когда выполняется обобщенная формула

ПНП-линзы и парциальный пропагатор сильно локализован около изображаемой точки на микрообъекте.

Интересно, что сам по себе факт неоднородного поглощения в рентгеновской линзе приводит к необычному эффекту видимости неоднородных прозрачных микрообъектов на сфокусированном изображении. Причем для слабонеоднородных микрообъектов такие изображения позволяют непосредственно визуализировать градиент сдвига фазы, создаваемой микрообъектом в точке изображения, и тем самым изучать его внутреннюю структуру. Этот вывод был сделан еще в [10], и он полностью применим и к длинным линзам с максимально короткими расстояниями при заданных радиусе кривизны и толщине отдельных элементов.

В качестве примера использования программы на рис. 7 показаны изображения микрообъекта в виде круглого отверстия диаметром 3 мкм в слое кремния толщиной 3 мкм. Ось отверстия параллельна оси  $z$  (оптической оси), поэтому на границе отверстия возникает скачок фазы. Рисунок показывает распределение  $F(x, y) = |A^{(0)}(x, y)|^2$ . Эта функция описывает интенсивность изображения относительно интенсивности точечного источника в случае отсутствия микрообъекта и линзы. При этом черное поле соответствует  $F_{\min}$ , а белое –  $F_{\max}$ . Значения  $F_{\min}$  и  $F_{\max}$  показаны над каждым фрагментом. Расчет выполнен для энергии фотонов  $E = 25$  кэВ, а параметры отдельного элемента соответствуют линзам группы Ленгелера [6], т.е. материал – алюминий,  $R = 0.2$  мм,  $p = 1$  мм,  $d = 0.01$  мм. Число элементов  $N = 100$ . В этом случае длина линзы  $L = 0.1$  м,  $F = L_c^2/L = 1.157$  м,  $F_L = L_c/\sin(L/L_c) = 1.174$  м, расстояния для изображения микрообъекта без увеличения  $r_i = r_o = 2.2973$  м. Точечный источник находится на оптической оси на расстоянии  $r_s = 40$  м от микрообъекта. Скачок фазы на границе отверстия  $\Delta\phi = -0.294$ , коэффициент поглощения в пластине 0.001. Очень малый коэффициент поглощения позволяет считать микрообъект совершенно прозрачным. Действительно, значения интенсивности в центре изображения микрообъекта и вне его на фрагментах  $\delta$ – $\gamma$  практически равны. На фрагменте  $a$  контраст очень слабый, поэтому можно заметить просветление в центре изображения отверстия.

С другой стороны, ПНП-линза отчетливо показывает края объекта, где имеется скачок фазы. На фрагменте  $a$  микрообъект находится в центре линзы. В этом случае граница изображается однородно по всем направлениям как понижение интенсивности, но контраст очень слабый – около 0.8%. На фрагменте  $b$  микрообъект сдвинут на 50 мкм влево от центра линзы, а изображение сдвинуто вправо. Видно общее уменьшение интенсивности, связанное с неоднородным поглощением в линзе. На



**Рис. 7.** Сфокусированные изображения микрообъекта в форме отверстия диаметром и глубиной 3 мкм в разных позициях относительно центра ПНП-линзы. Минимальное  $F_{\min}$  и максимальное  $F_{\max}$  значения интенсивности изображения объекта, отнесенной к интенсивности освещения объекта на отдельных фрагментах равны: (a)  $F_{\min} = 0.788$ ,  $F_{\max} = 0.802$ ; (б)  $F_{\min} = 0.362$ ,  $F_{\max} = 0.505$ ; (в)  $F_{\min} = 0.362$ ,  $F_{\max} = 0.505$ ; (г)  $F_{\min} = 0.177$ ,  $F_{\max} = 0.302$ . Уменьшение отношения связано с поглощением в линзе.

этом фоне граница микрообъекта изображается симметрично относительно горизонтальной оси, но асимметрично относительно вертикальной оси, причем контраст достаточно высокий, а именно 16.5%. На фрагменте  $b$  микрообъект сдвинут на 50 мкм вверх, а на фрагменте  $c$  сдвиг равен 50 мкм вверх и влево. Свойства симметрии изображения очевидны. Заметим, что контраст на фрагменте  $c$  еще выше и равен 26.1%. Ширина кольца, равная 0.4 мкм, равна теоретическому пределу разрешения линзы.

Заметим, что ПНП-линза из 100 элементов еще с хорошей точностью может считаться тонкой, так как  $L \approx F/10$ . Линзу с таким числом элементов использовали, например, в [12]. Расчет для линзы, состоящей из 400 элементов дает картины, аналогичные показанным на рис. 7, но с разрешением в 2 раза лучшим: около 0.2 мкм. Средняя относительная интенсивность равна  $\approx 0.18$  для фрагмента  $a$  и  $\approx 0.01$  для фрагмента  $c$ . В то же время контраст для фрагмента  $c$  почти 100%-ный. В этом случае  $L = 40$  см,  $F = 28.925$  см,  $F_L = 36.85$  см,  $r_i = r_o = 51.0243$  см. Таким образом, несмотря на некоторую потерю интенсивности, длинная ПНП-линза обладает лучшими оптическими свойствами, т.е. более высоким разрешением и меньшей длиной фокуса. Длина экспе-

риментальной схемы в этом случае не превышает 1,5 м.

Работа поддержанна РФФИ, гранты № 01-02-16508, 03-02-16971.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Snigirev A., Kohn V., Snigireva I. et al.* // Nature. 1996. V. 384. № 6604. P. 49.
2. *Elleaume P.* // J. Synchr. Rad. 1998. V. 5. № 1. P. 1.
3. *Snigirev A., Kohn V., Snigireva I. et al.* // Appl. Opt. 1998. V. 37. № 4. P. 653.
4. *Dudchik I.Yu., Kolchevskii N.N.* // Nucl. Instrum. Methods. A. 1999. V. 421. P. 361.
5. *Cederstrom B., Cahn R., Danielsson M. et al.* // Nature. 2000. V. 404. P. 951.
6. *Lengeler B., Schroer C.G., Richwin M. et al.* // Appl. Phys. Lett. 1999. V. 74. № 26. P. 3924.
7. *Ohishi Y., Baron A.Q.R., Ishii M. et al.* // Nucl. Instrum. Methods. A. 2001. V. 467–468. № 1–2. P. 962.
8. *Aristov V.V., Grigoriev M.V., Kuznetsov S.M. et al.* // Opt. Commun. 2000. V. 177. P. 33.
9. *Кон В.Г.* // Письма в ЖЭТФ. 2002. Т. 76. № 10. С. 701.
10. *Kohn V.G., Snigireva I., Snigirev A.* // Поверхность. Рентген., синхротр. и нейтр. исслед. 2003. № 1. С. 33.
11. <http://wavemetrics.com>.
12. *Lengeler B., Schroer C.G., Benner B. et al.* // J. Synchr. Rad. 2002. V. 9. № 3. P. 119.