

# К теории рентгеновской преломляющей оптики. Точное решение для параболической среды

В. Г. Кон<sup>1)2)</sup>

Российский научный центр “Курчатовский Институт”, 123182 Москва, Россия

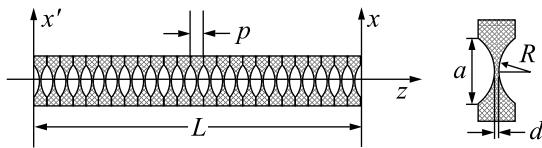
Поступила в редакцию 24 октября 2002 г.

Получено точное решение для пропагатора, описывающего распространение рентгеновских лучей через преломляющую параболическую среду. Такая среда возникает в составных преломляющих рентгеновских линзах с большим числом элементов, которые используются на источниках синхротронного излучения. Полученное решение позволяет детально проанализировать свойства таких линз и предсказать особенности их работы в конкретных приложениях (фокусировка пучков, изображение микрообъектов, фурье-преобразование).

PACS: 07.85.Qe, 41.50.+h, 42.30.-d

В течение 100 лет после открытия рентгеновского излучения существовало убеждение о невозможности использования преломляющих линз для фокусировки жестких рентгеновских пучков по двум причинам. Во-первых, коэффициент преломления для электромагнитного излучения с энергией  $E$  в интервале 10–50 кэВ очень слабо отличается от единицы. Во-вторых, такое излучение всегда имеет отличный от нуля коэффициент поглощения. Если записать комплексный коэффициент преломления в виде  $n = 1 - \delta + i\beta$ , то, например, для алюминия и  $E = 25$  кэВ имеем  $\delta = 8.643 \cdot 10^{-7}$ ,  $\beta = 1.747 \cdot 10^{-9}$ .

Проблема была решена в 1996 г. [1] с помощью использования составных линз, то есть состоящих из большого числа относительно тонких элементов. Весьма удачным обстоятельством оказалось то, что фазовая скорость рентгеновских лучей в веществе больше скорости света в вакууме, поэтому фокусирующая линза является двояко-вогнутой и толщина материала в центральной части линзы мала по сравнению с длиной поглощения. В настоящее время опубликовано много работ, в которых развиваются различные методы изготовления составных преломляющих линз для рентгеновских лучей. Наиболее интересными представляются составные линзы с круглой апертурой и параболическим профилем. Элементы таких линз получают выдавливанием параболического профиля в пластинках из алюминия (см., например, [2]) или органических материалов (см., например, [3]). Каждый элемент фокусирует параллельный пучок в точку на расстоянии  $F_1 = R/2\delta$ , где  $R$  – радиус кривизны параболического профиля (см. ри-



Составная преломляющая рентгеновская линза (слева) и параметры отдельного элемента линзы (справа)

сунок). При этом блок из  $N$  элементов будет иметь фокусное расстояние  $F \approx F_1/N$ . Пусть, например,  $F_1 = 100$  м. Используя блок из 100 элементов, получим фокусное расстояние, равное 1 м, что вполне приемлемо для проведения экспериментов на станциях синхротронного излучения.

Относительно легко можно изготовить линзу, имеющую 1000 элементов и более. При этом длина составной линзы  $L = Np$  увеличивается с ростом числа элементов  $N$ , а фокусное расстояние  $F$  уменьшается. Очевидно, что пока  $L \ll F$ , фокусное расстояние можно оценивать по формуле тонкой линзы:  $F \approx R/2N\delta$ . Однако и в этом случае линейные поправки по малому параметру  $L/F$  могут быть весьма существенными при изображении микрообъектов с предельным разрешением. Теоретический анализ работы составной линзы при длине  $L$ , сравнимой с фокусным расстоянием  $F$ , проводился только в приближении геометрической оптики (см., например, [4]), что явно недостаточно как для оценки размеров фокусного пятна, так и для анализа переноса изображения с помощью такой линзы.

Полное решение задачи о переносе излучения через длинную составную линзу должно иметь вид интегрального соотношения типа интеграла Кирхгофа. При этом задача сводится к нахождению ядра ин-

<sup>1)</sup>e-mail: kohn@kurm.polyn.kiae.su

<sup>2)</sup>V. G. Kohn.

тегрального преобразования (пропагатора), являюще-  
гося решением уравнения Максвелла с начальным  
условием в виде дельта-функции Дирака. В данной  
работе показано, что эта задача при определенных  
условиях имеет точное решение, то есть пропагатор  
может быть вычислен аналитически в форме, близ-  
кой к функции Гаусса с комплексными параметрами,  
для которых можно написать точные рекуррентные  
формулы. Предполагается, что синхротронное излу-  
чение (СИ) предварительно монохроматизировано и  
имеет достаточно высокую степень пространствен-  
ной когерентности. Такие условия выполнены, на-  
пример, на источниках СИ третьего поколения [5].

Выберем оптическую ось вдоль оси  $z$  (см. рису-  
нок) и представим общее решение уравнения Макс-  
велла в виде  $E(x, y, z) = \exp(i k z) A_t(x, y, z)$ , где  $k =$   
 $\omega/c$  – волновое число в вакууме. Функция  $A_t(x, y, z)$   
описывает перенос поперечной зависимости волново-  
го поля вдоль оси  $z$ . Так как излучение жесткое и  
слабо взаимодействует с веществом, можно с боль-  
шой точностью использовать параксиальное прибли-  
жение, то есть пренебречь второй производной от  $A_t$   
по координате  $z$  по сравнению с первой производной.  
В результате для функции  $A_t(x, y, z)$  имеем парабо-  
лическое уравнение

$$\frac{dA_t}{dz} = -ik\eta s(x, y, z)A_t + \frac{i}{2k} \left( \frac{d^2A_t}{dx^2} + \frac{d^2A_t}{dy^2} \right), \quad (1)$$

где  $\eta = 1 - n = \delta - i\beta = \delta(1 - i\gamma)$ . В задаче о пе-  
реносе излучения считается заданным волновое поле  
на входной поверхности линзы  $A_t(x, y, 0) = A_0(x, y)$ ,  
координата  $z$  отсчитывается от начала линзы. Внут-  
ри составной линзы функция  $s(x, y, z)$  равна 1 в тех  
областях, где материал присутствует, и равна 0 в пусты-  
тотах (см. рисунок).

Ниже ограничимся случаем, когда толщина  $p$  од-  
ного элемента составной линзы мала по сравнению с  
характерной длиной, на которой изменяется попереч-  
ная зависимость волнового поля. Другими словами,  
для одного элемента выполняется приближение тон-  
кой линзы. Это всегда имеет место для составной  
линзы с большим числом элементов. Указанное огра-  
ничение позволяет нам усреднить функцию  $s(x, y, z)$   
по размеру ее периода и заменить ее на функцию,  
зависящую только от поперечных координат:

$$\bar{s}(x, y) = \frac{d}{p} + \frac{x^2}{pR} + \frac{y^2}{pR}. \quad (2)$$

Такая зависимость имеет место только внутри гео-  
метрической апертуры линзы с диаметром  $a =$   
 $= 2[R(p - d)]^{1/2}$  (см. рисунок). Однако эффективная  
рабочая область линзы (эффективная апертура) опре-

деляется поглощением рентгеновских лучей в мате-  
риале линзы и почти всегда меньше геометрической  
апертуры. Поэтому формально можно считать, что  
зависимость (2) имеет место во всей интересующей  
нас области поперечной плоскости  $(X, Y)$ .

Разложим начальное волновое поле в интеграл  
Фурье:

$$A_0(x, y) = \int \frac{dq_x dq_y}{(2\pi)^2} \exp(iq_x x + iq_y y) \tilde{A}_0(q_x, q_y) \quad (3)$$

и рассмотрим решение  $\tilde{P}_t(x, y, q_x, q_y, z)$  с на-  
чальной функцией в виде плоской волны  
 $\tilde{P}_t(x, y, q_x, q_y, 0) = \exp(iq_x x + iq_y y)$ . Реше-  
ние можно представить в виде произведения  
 $\tilde{P}_t = \exp(-ik\eta[d/p]z)\tilde{P}(x, q_x, z)\tilde{P}(y, q_y, z)$ , причем  
парциальная функция  $\tilde{P}(x, q, z)$  удовлетворяет  
уравнению

$$\frac{d\tilde{P}}{dz} = -i\frac{k\eta}{pR}x^2\tilde{P} + \frac{i}{2k}\frac{d^2\tilde{P}}{dx^2}, \quad \tilde{P}(x, q, 0) = \exp(iqx). \quad (4)$$

Это уравнение формально совпадает с уравнением  
Шредингера для частицы в параболическом потенци-  
але. Однако нас здесь не интересует разложение по  
стационарным состояниям.

Принимая во внимание характер начальной функции,  
будем искать решение в виде функции Гаусса с  
комплексными коэффициентами:

$$\begin{aligned} \tilde{P}(x, q, z) &= \exp(i a_0(z) + ia_1(z)x + ia_2(z)x^2), \\ a_0(0) &= a_2(0) = 0, \quad a_1(0) = q. \end{aligned} \quad (5)$$

Подставляя (5) в (4) и приравнивая коэффициенты  
при одинаковых степенях  $x$ , получаем систему обык-  
новенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{da_0}{dz} &= \frac{i}{k}a_2 - \frac{1}{2k}a_1^2, \\ \frac{da_1}{dz} &= -\frac{2}{k}a_1a_2, \quad \frac{da_2}{dz} = -\frac{k\eta}{pR} - \frac{2}{k}a_2^2. \end{aligned} \quad (6)$$

Эта система имеет аналитическое решение при лю-  
бых начальных условиях, которое может быть запи-  
сано в виде

$$\begin{aligned} a_2(z) &= a_2(0) \frac{\operatorname{tg}(\alpha - z/z_c)}{\operatorname{tg}(\alpha)}, \\ a_1(z) &= a_1(0) \frac{\cos(\alpha)}{\cos(\alpha - z/z_c)}, \\ a_0(z) &= a_0(0) - \frac{i}{2} \ln \left( \frac{\cos(\alpha)}{\cos(\alpha - z/z_c)} \right) - \\ &\quad - \frac{a_1^2(0) z_c \operatorname{tg}(z/z_c)}{2k[1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}(z/z_c)]}, \\ \operatorname{tg}\alpha &= \frac{z_c}{z_0}, \quad z_0 = \frac{k}{2a_2(0)}, \quad z_c = \left( \frac{pR}{2\eta} \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (7)$$

Правильность решения можно проверить прямой подстановкой. С учетом начальных условий (5) и рекуррентных соотношений (7) для функции  $\tilde{P}(x, q, z)$  получаем выражение

$$\tilde{P}(x, q, z) = \exp\left(-i\frac{kt_z}{2z_c}x^2\right) c_z^{-1/2} \exp\left(i\frac{x}{c_z}q - i\frac{z_c t_z}{2k}q^2\right). \quad (8)$$

Здесь и далее используются обозначения  $s_z = \sin(z/z_c)$ ,  $c_z = \cos(z/z_c)$ ,  $t_z = \tan(z/z_c)$ .

Представим общее решение задачи (для любой начальной функции) в виде интеграла

$$A_t(x, y, z) = \int \frac{dq_x dq_y}{(2\pi)^2} \tilde{P}_t(x, y, q_x, q_y, z) \tilde{A}_0(q_x, q_y). \quad (9)$$

Подставляя сюда выражение для  $\tilde{A}_0(q_x, q_y)$  в виде обратного преобразования Фурье и выполняя интегрирование по  $q_x$ ,  $q_y$ , получаем искомое интегральное преобразование для составной рентгеновской линзы с параболическим профилем

$$A_t(x, y, z) = \int dx' dy' P_t(x, y, x', y', z) A_t(x', y', 0), \quad (10)$$

пропагатор которого факторизуется:

$$P_t(x, y, x', y', z) = \exp(-ik\eta[d/p]z) P(x, x', z) P(y, y', z), \quad (11)$$

и парциальный пропагатор определяется выражением

$$P(x, x', z) = \\ = \exp\left(-i\frac{\pi t_z}{\lambda z_c}x^2\right) \frac{1}{(i\lambda z_c s_z)^{1/2}} \exp\left(i\pi\frac{(x - x' c_z)^2}{\lambda z_c s_z c_z}\right). \quad (12)$$

Здесь  $\lambda = 2\pi/k$  – длина волны рентгеновского излучения.

Полученное выражение является главным результатом настоящей работы. Легко непосредственно проверить, что эта функция равна дельта-функции Дирака  $\delta(x - x')$  при  $z = 0$ . Очевидно, в пределе  $|\eta| \rightarrow 0$  интеграл (10) должен перейти в интеграл Кирхгофа. Действительно, выполняя в (12) предельный переход  $|z_c| \rightarrow \infty$ , получаем выражение для по-перечной части сферической волны в параксиальном приближении:

$$P(x, x', z) \underset{|\eta| \rightarrow 0}{\rightarrow} P_K(x - x', z) = \\ = \frac{1}{(i\lambda z)^{1/2}} \exp\left(i\pi\frac{(x - x')^2}{\lambda z}\right). \quad (13)$$

Выражение для пропагатора более сложной задачи о переносе излучения по воздуху на расстояние  $r_o$  перед линзой, через линзу длиной  $L$  и по воздуху на расстояние  $r_i$  после линзы можно записать в виде свертки

$$G(x, x', r_o, L, r_i) = \\ = \int dx_2 dx_1 P_K(x - x_2, r_i) P(x_2, x_1, L) P_K(x_1 - x', r_o). \quad (14)$$

Заметим, что интегралы в (14) вычисляются аналитически и приводят к аналитическому выражению для пропагатора  $G$ . Однако тот же ответ проще получить методом, развитым выше, а именно, используя три раза рекуррентные соотношения (7), причем для воздуха необходимо использовать их предельный переход при  $|\eta| \rightarrow 0$ . Метод рекуррентных соотношений (7) особенно удобен для разработки алгоритма компьютерного симулирования формирования изображений с помощью линзы. Такая компьютерная программа нами разработана, однако анализ конкретных результатов выходит за рамки данного краткого сообщения. Более того, этот метод может быть использован также для системы линз с различными параметрами.

Ниже рассмотрим главные особенности работы составной преломляющей линзы, следующие из формулы (12). С учетом неравенства  $\gamma = \beta/\delta \ll 1$  комплексный параметр  $z_c$  можно записать в виде  $z_c = (pF_1)^{1/2}(1 + i\gamma/2)$ . В области  $L \ll (pF_1)^{1/2}$ , ограничиваясь первыми членами разложения синуса и косинуса, получаем выражение для пропагатора в пределе тонкой линзы:

$$P_0(x, x', L) = \exp\left(-i\pi\frac{x^2}{\lambda F}[1 - i\gamma]\right) P_K(x - x', L), \\ F = \frac{F_1}{N} = \frac{R}{2N\delta}. \quad (15)$$

Заметим, что указанную выше область применимости приближения можно записать как  $L \ll F$ . Поглощение рентгеновских лучей приводит к тому, что плоская волна при прохождении через линзу приобретает гауссову форму, в которой распределение интенсивности имеет ширину на половине высоты, равную  $a_\gamma = 0.664(\lambda F/\gamma)^{1/2}$ . Эту величину можно считать эффективной апертурой линзы. Можно легко выписать выражение с учетом членов порядка  $(L/z_c)^3$ , позволяющее получить поправки порядка  $L/F$  к фокусному расстоянию в приближении тонкой линзы.

При  $L = L_0 = (pF_1)^{1/2}\pi/2$ , с учетом  $s_z = 1$ ,  $c_z = i\gamma\pi/4$  в линейном по  $\gamma$  приближении, получаем выражение для пропагатора в виде

$$P(x, x') = \frac{1}{(i\lambda z_c)^{1/2}} \exp \left[ -i \frac{2\pi}{\lambda z_c} xx' - \gamma \frac{\pi^2}{4\lambda z_c} (x^2 + x'^2) \right]. \quad (16)$$

Из этого выражения следует, что волна при прохождении через такую линзу модулируется гауссовой функцией из-за поглощения в линзе и затем преобразуется в свое фурье-изображение. В частности, плоская волна на выходе из линзы имеет гауссову форму распределения интенсивности с шириной на половине высоты, равной  $s_\gamma = 0.47(\lambda L_0 \gamma)^{1/2}$ , а фокусное расстояние равно  $L_0$ . Величина  $s_\gamma$  определяет диаметр фокусного пятна, в то время как эффективная апертура линзы равна в этом случае  $a_\gamma = 0.846(\lambda L_0 / \gamma)^{1/2}$ . При  $L = 2L_0$ , если пренебречь поглощением, пропагатор равен дельта-функции  $\delta(x + x')$ , то есть волновое поле восстанавливается в инвертированном виде. Очевидно, такие же свойства линзы будет иметь при  $L = 3L_0, 4L_0$  и так далее. Однако поглощение уменьшает рабочую область линзы с ростом  $L$ .

В заключение приведем оценку полученных параметров. Рассмотрим составную линзу из алюминия для энергии фотонов 25 кэВ. Пусть  $p = 1$  мм,

$R = 0.2$  мм [2]. В этом случае имеем  $\gamma = 2.02 \cdot 10^{-3}$ ,  $F_1 = 116$  м,  $L_0 = 53.4$  см. Таким образом критический размер составной линзы достигается при использовании 534 элементов. Очевидно,  $L_0$  есть минимальное фокусное расстояние, достижимое при данном радиусе кривизны параболических поверхностей. Диаметр фокусного пятна в этом случае равен  $s_\gamma = 0.11$  мкм, а эффективная апертура  $a_\gamma = 97$  мкм. Меньшее фокусное расстояние можно получить, постепенно уменьшая радиус кривизны поверхностей в отдельных элементах.

- 
1. A. Snigirev, V. Kohn, I. Snigireva, and B. Lengeler, *Nature* **384**, 49 (1996).
  2. B. Lengeler, C. G. Schroer, M. Richwin et al., *Appl. Phys. Lett.* **74**, 3924 (1999).
  3. Y. Ohishi, A. Q. R. Baron, M. Ishii et al., *Nucl. Instr. Meth.* **A467-468**, 962 (2001).
  4. V. V. Protopopov and K. A. Valiev, *Opt. Commun.* **151**, 297 (1998).
  5. V. Kohn, I. Snigireva, and A. Snigirev, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 2745 (2000).